

INVARIANTE LINEARFORMEN AUF FUNKTIONEN-
UND DISTRIBUTIONENRÄUMEN ÜBER LOKAL-
KOMPAKTEN GRUPPEN UND HOMOGENEN RÄUMEN

Lilian Asam

Diss. München
1983



Invariante Linearformen
auf Funktionen- und Distributionenräumen
über
lokalkompakten Gruppen und homogenen Räumen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der
Fakultät für Mathematik
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von :

Lilian Asam aus München

im März 1982.

Erster Referent : Prof. Dr. W. Roelcke

Zweiter Referent: Priv.Do. Dr. J. Voigt

Tag der mündlichen Prüfung : 28.Juni 1983

Einleitung und Zusammenfassung

Sei G eine lokalkompakte separierte topologische Gruppe (im folgenden kurz LK-Gruppe genannt), E ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{C}$, auf dem G vermöge

$$G \times E \longrightarrow E, (a, f) \longmapsto {}^a f$$

operiert (d.h. $a({}^b f) = {}^{ab} f$, $e_f = f$ für $a, b \in G$, $f \in E$), so daß die Abbildungen $E \rightarrow E$, $f \mapsto {}^a f$ für alle $a \in G$ linear sind.

$$\text{Sei } \Delta_G(E) := \text{span} \{ f - {}^a f \mid a \in G, f \in E \},$$

$$\text{LI}_G(E) := \{ M \in E^* \mid M({}^a f) = M(f) \text{ für } a \in G, f \in E \} \\ \cong (E/\Delta_G(E))^*$$

(* bezeichne jeweils das algebraische Dual).

Zu den Elementen von $\text{LI}_G(E)$ sagen wir linksinvariantes lineares Funktional oder kurz LILF auf E bzgl. G .

Unter dem LILF-Problem für E bzgl. G werde folgende Frage verstanden :

(0) Wie groß ist $\dim \text{LI}_G(E)$?

Ist bekannt, daß E ein eindeutig bestimmtes (bis auf komplexe Vielfache) stetiges LILF λ_G besitzt (das auch 0 sein kann), so sind die Aussagen

(1) Jedes LILF auf E bzgl. G ist stetig

(2) $\text{LI}_G(E) = \mathbb{C} \lambda_G$

(3) $\Delta_G(E) = \text{Kern } \lambda_G$

äquivalent .

In den letzten Jahren hat sich eine Reihe von Autoren mit dem LILF-Problem auf verschiedenen Funktionen- und Distributionenräumen E über einer LK-Gruppe G beschäftigt, die bzgl. der Linkstranslationen durch Elemente von G invariant sind und auf denen daher G in der obigen Weise operiert ; dabei wurden meist Räume betrachtet, die ein derartiges eindeutig bestimmtes stetiges LILF λ_G besitzen

(siehe Meisters [1] - [9], Meisters/Schmidt [1], Meisters/Kregelius Petersen [1], Woodward [1], Johnson [2], Ludvik [1], Gramain [1], Serold [1], Roelcke et al [1], Asam [1]) .

In Meisters [9] wird eine Übersicht über die bisher erzielten Resultate gegeben .

Für einige der bisher behandelten Funktionen- bzw. Distributionenräume E (z.B. $E = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit den Operationen $\mathbb{R}^n \times E \rightarrow E$, $(a, f) \mapsto {}^a f$, ${}^a f(x) := f(x-a)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, falls $E = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ bzw. ${}^a f(g) := f({}^{-a}g)$ falls $E = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$: siehe Meisters [1], [2], [8], [9], Meisters/Kregelius Petersen [1], Kregelius Petersen [1]) konnte sogar gezeigt werden, daß folgende Verschärfung von (1)-(3) gilt :

- (4) Es gibt eine Teilmenge B von G , so daß die von B erzeugte Untergruppe $[B]$ von G eine echte Teilmenge von G ist, mit der folgenden Eigenschaft :

$$\Delta_B(E) := \text{span} \{ f - {}^a f \mid a \in B, f \in E \} = \text{Kern } \lambda_G$$

(λ_G sei wieder das eindeutig bestimmte stetige LILF auf E).

Bei den oben genannten Räumen konnte B sogar endlich gewählt werden.

Analog zu oben sei

$$(5) \text{ LI}_B(E) := \{ M \in E^* \mid M({}^a f) = M(f) \text{ für } a \in B, f \in E \},$$

also $\Delta_B(E) = \bigcap \{ \text{Kern } M \mid M \in \text{LI}_B(E) \}$ und $\text{LI}_B(E) \cong (E / \Delta_B(E))^*$ für $B \subset G$ ¹⁾.

Motiviert durch (4) wird daher im Rahmen dieser Arbeit (0) nach Möglichkeit präzisiert zu

- (6) Wie groß ist $\dim \text{LI}_B(E)$ (für geeignetes $B \subset G$) ?

Für den Raum $E = \mathcal{K}(G)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit ${}^a f(x) := f(a^{-1}x)$ für $a, x \in G$ (hier ist das linke Haarintegral μ_G eindeutig bestimmtes stetiges ²⁾ LILF) wurde in Roelcke et al [1] gezeigt, daß im Falle einer unendlichen kompakten abelschen Torsionsgruppe G $\dim \text{LI}_G(\mathcal{K}(G)) \geq 2^{\mathfrak{L}}$ ($\mathfrak{L}$ sei die Mächtigkeit des Kontinuums) gilt, während für $G = \mathbb{R}$ bzw. $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (Torusgruppe) für $E = \mathcal{K}(G)$ die Frage, ob (1) gilt, ungelöst ist

1) Es gilt stets : $\text{LI}_B(E) = \text{LI}_{[B]}(E)$ ($[B]$ wie in (4))

2) bzgl. der üblichen induktiven Limestopologie von $\mathcal{K}(G)$

(Meisters [9], Open Problem 2, Roelcke et al [1])¹⁾.

Meisters zeigte , daß für kompaktes abelsches G und $B \subset G$ endlich stets $\dim \text{LI}_B(\mathcal{K}(G)) > 1$ gilt (Meisters [8] , Theorem 5).

Im 1. Kapitel dieser Arbeit beziehen wir nun auch für eine abgeschlossene Untergruppe H von G den Raum $E = \mathcal{K}(G/H)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger auf dem lokalkompakten homogenen Raum G/H (dabei operiert G auf $\mathcal{K}(G/H)$ vermöge $G \times \mathcal{K}(G/H) \rightarrow \mathcal{K}(G/H), (a, f) \mapsto {}^a f$ mit ${}^a f(xH) := f(a^{-1}xH)$ für $x \in G$) mit in die LILF-Problematik ein, wobei teilweise der Begriff der "Linksinvarianz" dem der "Quasiinvarianz" weichen muß.

Aus den Arbeiten Masters/Kregelius Petersen [1] und Kregelius Petersen [1] folgt für den Raum $E'(\mathbb{R})$ der Distributionen mit kompaktem Träger (hier ist das "erweiterte Lebesgue-Integral" $\tilde{\mu}_{\mathbb{R}} : E'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, S \mapsto S(1)$, das eindeutig bestimmte LILF) , daß $\dim \text{LI}_B(E'(\mathbb{R})) = 1$ für eine Teilmenge B von $\mathbb{R}$ genau dann erfüllt ist , wenn B eine gewisse Approximationseigenschaft nicht besitzt ; insbesondere gilt für $a \in \mathbb{R}$:

(7) $\dim \text{LI}_{\{a, 1\}}(E'(\mathbb{R})) = 1 \iff a$ ist eine irrationale Nicht-Liouville-Zahl

Aus den Aussagen von Masters folgt weiter, daß aus $\dim \text{LI}_B(E'(\mathbb{R})) = 1$ auch $\dim \text{LI}_B(\mathcal{D}(\mathbb{R})) = 1$, $\dim \text{LI}_B(\mathcal{D}'(G)) = 1$ und $\dim \text{LI}_B(E(\mathbb{R})) = 1$ resultieren (für $B \subset \mathbb{R}$) (siehe Masters [2]). Für den Raum der Distributionen $\mathcal{D}'(T)$ auf der Torusgruppe $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ wies Masters nach , daß $\dim \text{LI}_{\{a+\mathbb{Z}\}}(\mathcal{D}'(T)) = 1$ genau dann , wenn $a \in \mathbb{R}$ eine irrationale Nicht-Liouville-Zahl ist.

Das Ziel des 2. Kapitels dieser Arbeit ist es , auch für beliebige , vor allem aber kompakt erzeugte abelsche und profinite Gruppen G Zusammenhänge zwischen den LILF-Problemen für $E'(G)$, $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{D}'(G)$ und $E(G)$ und dem Nicht-Erfülltsein gewisser Approximationseigenschaften für Teilmengen B von G festzustellen , die die Aussagen von Masters und E.Kregelius Petersen verallgemeinern . Weiter wird sich zeigen , daß für

1) Anm. d. Verf. bei der Überarbeitung : Aus der noch nicht erschienenen Arbeit "Discontinuous Translation Invariant Functionals" von S.Saeki (Ergebnisse ca. vom Herbst 1982) folgt, daß $\dim \text{LI}(\mathcal{K}(G))$ für abelsches kompaktes G überabzählbar ist. Insbesondere ergeben sich hieraus die Überabzählbarkeit von $\dim \text{LI}(\mathcal{K}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$ und $\dim \text{LI}(\mathcal{K}(\mathbb{R}))$ (wegen Roelcke et al [1] , 5. Theorem) .

kompaktes G entsprechende Beziehungen zwischen den LILF-Problemen für den Raum $A_1(G)$ der Pseudomaße auf G und dem Raum $A_1(G)$, der die positiv definiten stetigen Funktionen von G enthält, und Teilmengen B von G bestehen, die gewisse andere Approximationseigenschaften nicht haben.

Nun zu den beiden Kapiteln, aus denen diese Arbeit besteht, im einzelnen; zunächst zu Kapitel 1:

Ist H eine beliebige abgeschlossene Untergruppe von G , nicht notwendig Normalteiler von G , so operiert G auf dem Raum $\mathcal{K}(G/H)$ vermöge

$$G \times \mathcal{K}(G/H) \longrightarrow \mathcal{K}(G/H), (a, f) \longmapsto {}^a f \quad \text{mit} \\ {}^a f(xH) := f(a^{-1}xH) \quad \text{für } x \in G \\ (a \in G, f \in \mathcal{K}(G/H)).$$

Mittels des linken Haarintegrals μ_G und aufgrund der Existenz einer stetigen Funktion $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mit $q(xy) = q(x) \frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}$ für $x \in G, y \in H$ kann zwar auf $\mathcal{K}(G/H)$ eine stetige (positive) Linearform $\mu_{G/H} \neq 0$, die auch bei festem q eindeutig bestimmt ist (bis auf Vielfache), gefunden werden (siehe Reiter [1], Chap. 8, §1), doch ist $\mu_{G/H}$ i.a. nicht mehr linksinvariant bzgl. G , sondern nur noch quasiinvariant (bzgl. q), d.h.

$$\mu_{G/H}({}^a f) = \mu_{G/H}(\lambda_a^q f) \quad \text{für alle } a \in G, f \in \mathcal{K}(G/H),$$

wobei $(\lambda_a^q)_{a \in G}$ die Familie von stetigen Abbildungen $\lambda_a^q: G/H \rightarrow \mathbb{C}, xH \mapsto \frac{q(ax)}{q(x)} \quad (a \in G) \quad (*)$ sei.

In §1 definieren wir nun allgemein die Räume $QI_B(\mathcal{K}(G/H)) := \{M \in (\mathcal{K}(G/H))^* \mid M({}^a f) = M(\lambda_a^q f) \text{ für } f \in \mathcal{K}(G/H), a \in B\}$ der B -quasiinvarianten (bzgl. λ^q) linearen Funktionale oder B -QILF's für eine Teilmenge B von G und einen sog. quasi- H -Homomorphismus $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, wobei λ^q zu q wie in (*) gebildet wird.

In §2 werden die Beziehungen zwischen $QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))$ und $LI_B(\mathcal{K}(G))$ ($B, B' \subset G$) behandelt. Die hierbei erzielten Resultate stellen Erweiterungen der in Roelcke et al [1] bzw. Asam [1] bewiesenen Vererbungsaussagen

-
- 1) Δ_G bzw. Δ_H seien die linken Modularfunktionen von G bzw. H
 - 2) $\mathcal{K}(G/H)$ sei mit der induktiven Limestopologie bzgl. der Räume $\mathcal{K}_K(G/H) := \{f \in \mathcal{K}(G/H) \mid \text{supp } f \subset K\}$ ($K \in G/H$ kompakt) mit der Supremumsnorm versehen.

- (8) a) $\dim \text{LI}_{G/H}(\mathcal{K}(G/H)) \leq \dim \text{LI}_G(\mathcal{K}(G))$
 falls H ein abgeschlossener Normalteiler von G ist
 b) $\dim \text{LI}_{G/H}(\mathcal{K}(G/H)) = \dim \text{LI}_G(\mathcal{K}(G))$
 falls H ein diskreter Normalteiler von G ist .

dar :

Es stellt sich heraus , daß $\text{QI}_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))$ isomorph zu einem linearen Teilraum von $\text{LI}_B(\mathcal{K}(G))$ ist , dessen Elemente M gewisse zusätzliche "Relativinvarianz"-Eigenschaften bzgl. der Operation $\mathcal{K}(G) \times H \rightarrow \mathcal{K}(G)$, $(f, a) \mapsto f^a$, $f^a(x) := f(xa^{-1})$ ($x \in G$) ("Rechtstranslation" bzgl. H) besitzen . Dieser Teilraum U kann durch die sog. "Überwälzungsregel" charakterisiert werden (siehe (2.10) und (2.13)) :

Für $M \in \text{LI}_B(\mathcal{K}(G))$ ($B \subset G$) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(9) $M \in U$

- (10) $\bigvee_{f \in \mathcal{K}(G)} \bigvee_{g \in \mathcal{K}(G)} M(f \overline{T_{H,q}}(g)) = M(\overline{T_{H,q}}(f) g)$,
 wobei $\overline{T_{H,q}}(h)(x) := \int_H h(xy) \frac{1}{q(xy)} d\mu_H(y)$ für $h \in \mathcal{K}(G)$, $x \in G$.
 ("Überwälzungsregel")

Diese Charakterisierung erweist sich als sehr nützlich für den Beweis der Erweiterung von (8) b) , insbesondere also auch für einen Beweis von (8) b) selbst (siehe (2.18) , (2.21)).

In §3 werden die Resultate von §2 auf den speziellen Fall $G = H_1 \rtimes H_2$ (semidirektes Produkt : vgl. (3.1), (3.2)) angewandt. H_2 ist i.a. kein Normalteiler von G . Aus den Aussagen in §2 können nun auch Beziehungen zwischen $\text{LI}_{H_1}(\mathcal{K}(H_1))$, $\text{LI}_G(\mathcal{K}(G/H_2))$, $\text{LI}_G(\mathcal{K}(G))$ und $\text{LI}_{H_1 \times H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2))$ hergeleitet werden . Für diskretes H_2 ergibt sich dabei (siehe (3.16)) :

- (11) $\text{LI}_{H_1}(\mathcal{K}(H_1)) \cong \text{LI}_{H_1 \times H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2)) \cong \text{LI}_G(\mathcal{K}(G))$
 (insbesondere hängt also $\dim \text{LI}_{H_1 \rtimes H_2}(\mathcal{K}(H_1 \rtimes H_2))$ bei diskretem H_2 nicht von $\rtimes$ ab) ;
 obwohl H_1 und G/H_2 als topologische homogene Räume isomorph sind , gilt i.a. nicht : $\text{LI}_{H_1}(\mathcal{K}(H_1)) = \text{LI}_G(\mathcal{K}(G/H_2))$
 (vgl. (3.17)) .

Da für gewisse kompakte Gruppen (siehe die schon oben zitierte Aussage in Roelcke et al [1]) wegen $\dim \text{LI}_G(\mathcal{H}(G)) > 1$ insbesondere die Linksinvarianz (bzgl. G) keine Charakterisierung des linken Haarintegrals darstellt, wird in §4 untersucht, ob eventuell zusätzliche Invarianzeigenschaften zu einer solchen Charakterisierung führen. Für unimodulare Gruppen G ist μ_G beispielsweise invariant bzgl. des stetigen Antiautomorphismus $\tau: G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$, d.h. $\mu_G(f \circ \tau) = \mu_G(f)$ für alle $f \in \mathcal{H}(G)$.

Für eine beliebige LK-Gruppe G bezeichnen wir nun ein LILF M auf $\mathcal{H}(G)$ als gerade (bzw. ungerade), wenn $M(f \circ \tau) = M(f)$ (bzw. $M(f \circ \tau) = -M(f)$). Mit $\text{GLI}(\mathcal{H}(G))$ (bzw. $\text{ULI}(\mathcal{H}(G))$) werden die linearen Teilräume von $\text{LI}_G(\mathcal{H}(G))$ der geraden (bzw. ungeraden) LILF's auf $\mathcal{H}(G)$ bezeichnet.

Man kann nun zeigen, daß der Raum $\text{BI}(\mathcal{H}(G))$ der biinvarianten Linearformen auf $\mathcal{H}(G)$, das sind LILF's, die auch bzgl. der Operation $\mathcal{H}(G) \times G \rightarrow \mathcal{H}(G), (f, a) \mapsto f^a$ mit $f^a(x) := f(xa^{-1})$ ($x \in G$) invariant sind, sich gerade als direkte Summe der Räume $\text{GLI}(\mathcal{H}(G))$ und $\text{ULI}(\mathcal{H}(G))$ darstellt; insbesondere kann also im Fall einer abelschen LK-Gruppe G jedes LILF M auf $\mathcal{H}(G)$ eindeutig als Summe eines geraden und eines ungeraden LILF's geschrieben werden (vgl. (4.4)).

Daß jedoch auch die Invarianz bzgl. τ , also das Geradessein eines LILF's M auf $\mathcal{H}(G)$ keineswegs die Übereinstimmung mit einem Vielfachen des linken Haarintegrals implizieren muß, zeigt (4.6); man hat folgendes, die Aussage in Roelcke et al [1] verallgemeinernde, Resultat:

- (12) Sei G eine kompakte metrisierbare Gruppe, die keine endliche Teilmenge B besitzt, so daß der kleinste Normalteiler von G , der B enthält, in G dicht ist (d.h. G ist nicht "polythetisch"); dann gilt:
- $$\dim \text{GLI}(\mathcal{H}(G)) = \dim \text{BI}(\mathcal{H}(G)) = \dim \text{LI}_G(\mathcal{H}(G)) = 2^{\aleph_0}.$$

Man kann sogar zeigen, daß für gewisse kompakte metrisierbare nicht polythetische Gruppen auch gilt: $\dim \text{ULI}(\mathcal{H}(G)) = 2^{\aleph_0}$ (siehe (4.6), (4.7) und (4.8)); in diesen Fällen hat man also insbesondere: $\text{LI}_G(\mathcal{H}(G)) \cong \text{GLI}(\mathcal{H}(G))$.

Nun eine Übersicht zu Kapitel 2 :

Da die Theorie der Distributionen auf beliebigen LK-Gruppen G , wie sie von Bruhat entwickelt wurde, noch nicht sehr verbreitet ist, wird im 1. Abschnitt von §1 zunächst eine kurze Einführung in diese Theorie gegeben. Diesen Ausführungen liegen im wesentlichen die Arbeit von Bruhat (Bruhat [1]) und die Dissertation von D.L. Johnson (Johnson [1]) zugrunde. Wie bei $\mathcal{K}(G)$ sind auch für den Raum $\mathcal{E}'(G)$ der Distributionen mit kompaktem Träger auf G Reduktions- oder Vererbungsaussagen vom Typ (8) a) bzw. b) sowie die Tatsache, daß wie bei $\mathcal{K}(G)$ $\dim \text{LI}_G(\mathcal{E}'(G))$ und $\dim \text{LI}_H(\mathcal{E}'(H))$ übereinstimmen, falls H eine offene Untergruppe von G ist (vgl. Roelcke et al [1], 2. Prop., Asam [1], (7.1)), für die Lösung des LILF-Problems auf $\mathcal{E}'(G)$ von großem Nutzen. Sie werden im 2. Abschnitt von §1 dieses Kapitels nachgewiesen, ebenso wie ähnliche Vererbungssätze für $\mathcal{D}(G)$ (für diesen Raum wurden die entsprechenden Reduktionsaussagen schon in der Arbeit Johnson [2] angeführt), $\mathcal{D}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$.

Als Bilder unter der (injektiven) Fouriertransformation der Distributionenräume $\mathcal{E}'(G) = \mathcal{D}'(G)$ und $A_1'(G)$ für kompaktes G (meist beschränken wir uns jedoch auf den abelschen oder den profiniten (d.h. G ist projektiver Limes von endlichen Gruppen) Fall) erhält man Unter-algebren $\mathcal{A}_P(\Sigma)$ von $\tilde{\mathcal{E}}(\Sigma) := \prod_{\mathfrak{G} \in \Sigma} B(H_{\mathfrak{G}})^1$, wobei Σ das duale Objekt von G bezeichne, $(H_{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{G} \in \Sigma}$ die Familie der Darstellungsräume eines festen Repräsentantensystems $\mathcal{U} = (U^{(\mathfrak{G})})_{\mathfrak{G} \in \Sigma}$ von Σ sei; $B(H_{\mathfrak{G}})$ sei der Raum der linearen Operatoren von $H_{\mathfrak{G}}$ in sich ($\mathfrak{G} \in \Sigma$). Der Buchstabe P kennzeichnet hierbei eine Familie von nichtnegativen Funktionen auf Teilmengen von Σ , bzgl. der die Elemente von $\mathcal{A}_P(\Sigma)$ gewissen Wachstumsbedingungen genügen. Teilräumen von $\mathcal{D}'(G)$ und $A_1'(G)$ wie Kern $\tilde{\mu}_G$ und Kern $\tilde{\mu}_G$ (dabei sei $\tilde{\mu}_G: \mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathbb{C}$, $S \mapsto S(1)$, die eindeutig bestimmte Fortsetzung von μ_G auf den Raum $\mathcal{D}'(G)$, $\tilde{\mu}_G: A_1'(G) \rightarrow \mathbb{C}$, $S \mapsto S(1)$, Fortsetzung von μ_G auf $A_1'(G)$) entsprechen bei der Fouriertransformation gewisse Ideale $\mathcal{A}_P(S)$ ($S \subset \Sigma$) von $\mathcal{A}_P(\Sigma)$, deren Elementen gewisse "Nullstellen" vorgeschrieben sind. Im abelschen Fall können die Algebren $\mathcal{A}_P(\Sigma)$, die $\mathcal{D}'(G)$ und $A_1'(G)$ entsprechen, mit dem Distributionenraum $\mathcal{S}'(\hat{G})$, wie ihn Bruhat definiert (vgl. Bruhat [1], 9.), bzw. $1_{\infty}(\hat{G})$ identifiziert werden.

1) $\tilde{\mathcal{E}}(\Sigma)$ ist eine Algebra bzgl. der komponentenweisen Addition, Komposition und skalaren Multiplikation

Speziell : Für $G = T^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, T sei die Torusgruppe) stellt der Raum der langsam wachsenden Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ das Bild von $\mathcal{D}'(T^n)$ unter der Fouriertransformation dar (vgl. Schwartz [1], Chap. VII, §1), während Kern $\tilde{\mu}_T$ dem Unterraum derjenigen langsam wachsenden Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ entspricht, für die $a_0 = 0$ gilt.

Im §2 wird nun eine sehr allgemeine Definition der Algebren $\mathcal{A}_P(S)$ angegeben, da die wesentlichen Aussagen entsprechend allgemeingültig sind, und der Zusammenhang mit dem Bild verschiedener Distributionenräume auf kompakten Gruppen unter der Fouriertransformation hergestellt.

Durch die Fouriertransformation $\tilde{\mathcal{F}}$ überträgt sich die Links-translation von G auf $\mathcal{D}'(G)$, die auch dargestellt werden kann durch

$$G \times \mathcal{D}'(G) \longrightarrow \mathcal{D}'(G), (a, S) \longmapsto {}^a\delta * S \quad (\text{wobei } {}^a\delta \text{ das Dirac-} \\ \text{maß in } a \text{ (} a \in G \text{) be-} \\ \text{zeichne)},$$

zu einer Operation von G auf der entsprechenden Algebra $\mathcal{A}_P(\Sigma)$:

$$G \times \mathcal{A}_P(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{A}_P(\Sigma), (a, f) \longmapsto \bar{U}_a \circ f, \text{ wobei} \\ \bar{U}_a := (\bar{U}^{(\sigma)}(a))_{\sigma \in \Sigma} \text{ für } a \in G$$

($\bar{U}^{(\sigma)}$ sei die Konjugierte der Darstellung $U^{(\sigma)}$ ($\sigma \in \Sigma$)).

Aus dem LILF-Problem auf $\mathcal{D}'(G)$ ergibt sich daher ein entsprechendes LILF-Problem auf $\mathcal{A}_P(\Sigma)$:

Aus der Frage, für welche $B \subset G$

$$(13) \quad \Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$$

erhält man das Problem, für welche $B \subset G$

$$(14) \quad \Delta_B(\mathcal{A}_P(\Sigma)) = \tilde{\mathcal{F}}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G) \text{ (=Hyperebene in } \mathcal{A}_P(\Sigma) \text{)}$$

Da einerseits $\tilde{\mathcal{F}}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G) = \mathcal{A}_P(S_0)$ für geeignetes $S_0 \subset \Sigma$, andererseits (für $B \subset G$)

$$\Delta_B(\mathcal{A}_P(\Sigma)) = \text{span} \{ f - \bar{U}_a \circ f \mid a \in G, f \in \mathcal{A}_P(\Sigma) \} \\ = \text{span} \{ f_a \circ f \mid a \in G, f \in \mathcal{A}_P(\Sigma) \} \\ \text{für } f_a := (\text{id}_{H_\sigma})_{\sigma \in \Sigma} - \bar{U}_a \in \mathcal{A}_P(S_0)^1 \text{ (} a \in B \text{)}$$

ist (14) und damit auch (13) gleichbedeutend mit der Frage, wann das von $\{f_a \mid a \in B\}$ erzeugte Rechtsideal in $\mathcal{A}_P(\Sigma)$ mit $\mathcal{A}_P(S_0)$ übereinstimmt.

1) siehe (2.3.2), (2.3.6), (2.3.9)

Ebenso wird in §2 das LILF-Problem für $A_1'(G)$ (G beliebige kompakte Gruppe) in ein Erzeugungsproblem der entsprechenden Algebra $A_0(S_0)$ übersetzt.

Entscheidend für die Lösung des LILF-Problems für $\mathcal{D}'(G)$ und $A_1'(G)$ (für kompaktes G) sind daher die Aussagen im 3. Abschnitt von §2, die Antwort auf die Frage geben, wann das von einer Teilmenge Y von $A_p(S)$ erzeugte Rechtsideal in $A_p(\Sigma)$ gleich $A_p(S)$ ist (für $S \subset \Sigma$).

Zum einen wird hier festgestellt, daß $A_p(S)$ stets ein Element besitzt und ein Ideal von $A_p(\Sigma)$ ist; insbesondere folgt deshalb aus der Tatsache, daß das von einer Teilmenge Y von $A_p(S)$ erzeugte Rechtsideal in $A_p(\Sigma)$ mit $A_p(S)$ übereinstimmt, die entsprechende Aussage für eine endliche Teilmenge von Y . Zum andern liefert das "Erzeugungstheorem" (siehe (2.3.15)) eine genaue Charakterisierung derjenigen Teilmengen Y von $A_p(S)$, die $A_p(S)$ in obigem Sinn erzeugen.

Dieses "Erzeugungstheorem", das hier offensichtlich eine zentrale Rolle einnimmt, stellt eine Art verallgemeinerte "Diskretisierung" eines Theorems von Hörmander über die Erzeugung von Algebren holomorpher Funktionen mit gewissen Wachstumsbedingungen auf dem $\mathbb{C}^n$ dar (siehe Hörmander [1]), das von Meisters und E. Kregelius Petersen zum Beweis der Aussagen über $LI_B(E'(\mathbb{R}))$ für $B \subset \mathbb{R}$ (siehe oben) benutzt wurde: Diese "Diskretisierung" kommt nun gerade durch die Beschränkung auf kompakte Gruppen zustande. Wir werden jedoch sehen¹⁾, daß zumindest im Fall einer kompakt erzeugten abelschen LK-Gruppe G ohnehin das LILF-Problem auf $\mathcal{D}'(G)$ auf das einer kompakten Gruppe reduziert werden kann, was beispielweise für den speziellen Fall $G = \mathbb{R}$ zu einer wesentlichen Vereinfachung des Beweises der Aussagen von Meisters und E. Kregelius Petersen führt.

Für eine endliche Teilmenge B von G stellen die vom "Erzeugungstheorem" an die Teilmenge $\{f_a \mid a \in B\}$ von $A_p(S_0)$ gestellten Bedingungen zur Erfüllung von (14) und damit von (13) gewisse "schlechte Approximationseigenschaften" dar. In §3 definieren wir daher die nicht gleichzeitige P -Approximierbarkeit von endlich vielen Elementen aus G auf einer Teilmenge S von Σ für gewisse Familien P von nichtnegativen reellwertigen Funktionen auf Teilmengen von Σ ; die Existenz solcher Elemente von G wird an einer Reihe von Beispielen un-

1) siehe (4.1.7) und (4.1.8).



tersucht. Der Begriff der nicht gleichzeitigen P-Approximierbarkeit wird nun weiter auf beliebige LK-Gruppen G übertragen, derart, daß aber die Eigenschaft der nicht gleichzeitigen P-Approximierbarkeit von $a_1, \dots, a_r \in G$ stets invariant bzgl. eines fest vorgegebenen abgeschlossenen Normalteilers H von G mit G/H kompakt ist; insbesondere ist der von E. Kregelius Petersen geprägte Begriff der "nicht gleichzeitig schnell approximierbaren" Zahlentupel (siehe Kregelius Petersen [1]) invariant bzgl. $\mathbb{Z}$ und daher im Grunde eine Eigenschaft von Elementen der Torusgruppe; es zeigt sich, daß dieser Begriff einen Spezialfall von P-Approximierbarkeit für ein geeignetes P beinhaltet.

Im 1. Abschnitt von §4 wird in den Theoremen (4.1.1), (4.1.2) und (4.1.7) das präziisierte LILF-Problem auf $\mathcal{E}'(G)$ (siehe (6)) für kompakt erzeugte abelsche und profinite LK-Gruppen durch eine Charakterisierung derjenigen $B \subset G$, für die $\Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ gilt, beantwortet; aus der endlichen Erzeugtheit der Algebren $A_P(S)$ folgt für kompaktes G sofort, daß sich aus der Aussage

$$\Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G \quad (*)$$

die entsprechende für eine endliche Teilmenge von B ergeben muß.

Für kompaktes abelsches oder profinites G ergibt sich:

(15) Sei $B \subset G$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $\Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$, d.h. $\dim \text{LI}_B(\mathcal{D}'(G)) = 1$
- b) $\exists_{\substack{B' \subset B \\ \text{endlich}}} \Delta_{B'}(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$, d.h. $\dim \text{LI}_{B'}(\mathcal{D}'(G)) = 1$
- c) $\exists_{a_1, \dots, a_r \in B} a_1, \dots, a_r$ nicht gleichzeitig P-approximierbar bzgl. S_0

(wobei P wie in (14) ist, S_0 so, daß $\tilde{\mathcal{F}}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G) = A_P(S_0)$).

Da jede kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppe G eine endlich erzeugte diskrete Untergruppe H besitzt, so daß G/H kompakt ist, folgt aus den Vererbungsaussagen für $\mathcal{E}'(G)$, daß auch für diesen Fall die Existenz von Elementen $a_1, \dots, a_r \in G$, die nicht gleichzeitig P-approximierbar sind bzgl. einer geeigneten Teil-

menge von H^1 , wesentlich für die Lösbarkeit des LILF-Problems auf $\mathcal{E}'(G)$ ist; auch die Tatsache, daß aus $\dim LI_G(\mathcal{E}'(G)) = 1$ die entsprechende Aussage für eine endliche Teilmenge von G gelten muß, bleibt für diesen Gruppentyp erhalten. Mit den Ergebnissen von §3 kann nun das LILF-Problem für $\mathcal{E}'(G)$ für eine Reihe von LK-Gruppen gelöst werden. Insbesondere hat man für $G = T^I$ (T Torusgruppe, I beliebige Indexmenge):

(16) Die Aussagen

a) $\text{card}(I) \leq \mathfrak{L}$ ($\mathfrak{L}$ sei die Mächtigkeit des Kontinuums)

b) $\dim LI_{T^I}(\mathcal{Q}'(T^I)) = 1$

c) $\bigcup_{a \in T^I} \dim LI_{\{a\}}(\mathcal{Q}'(T^I)) = 1$

sind äquivalent (vgl. (4.1.4)b)).

Da jede abelsche LK-Gruppe G eine kompakt erzeugte offene Untergruppe besitzt, kann aufgrund des in §1 bewiesenen Vererbungssatzes das LILF-Problem für $\mathcal{E}'(G)$ im allgemeinen abelschen Fall stets auf den kompakt erzeugten Fall reduziert werden ((4.1.11))

D.L.Johnson zeigte bereits (siehe Johnson[2], 3., Theorem 1, Cor. und Theorem 2), daß für alle abelschen und für alle total unzusammenhängenden LK-Gruppen G $\dim LI_G(\mathcal{Q}(G)) = 1$. Hier wird nun das verschärfte LILF-Problem für $\mathcal{Q}(G)$ behandelt. Man erhält das folgende Resultat (siehe (4.1.17) und (4.1.21)):

(17) Sei G eine kompakte abelsche oder profinite Gruppe, B eine endliche Teilmenge von G .

Dann sind die Aussagen

a) $\dim LI_B(\mathcal{Q}'(G)) = 1$

und

b) $\dim LI_B(\mathcal{Q}(G)) = 1$

äquivalent.

Hieraus folgt (vgl. etwa (16)), daß für gewisse abelsche Gruppen die Aussage von D.L.Johnson nicht durch $\dim LI_B(\mathcal{Q}(G)) = 1$ für eine endliche Teilmenge von G ersetzt werden kann.

Der 2. Abschnitt von §4 behandelt das LILF-Problem für die Räume $\mathcal{D}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$ bei nicht-kompaktem G . Für die hier durchgeführten Untersuchungen ist der folgende Gedanke wesentlich (siehe (4.2.2) und (4.2.3)) :

(18) Sei $E = \mathcal{D}'(G)$ oder $\mathcal{E}(G)$ (G beliebige LK-Gruppe) .

Gilt

$E = T * E$ für ein $T \in \Delta_B(\mathcal{E}'(G))$, $B \subset G$ endlich ,

so folgt :

$$\Delta_B(E) = E .$$

Daß die in (18) angeführte Bedingung erfüllt werden kann , zeigen wir für $E \in \{\mathcal{D}'(G), \mathcal{E}(G)\}$ für folgende beiden Typen von LK-Gruppen G (vgl. (4.2.6)) :

(Typ I) $G = \mathbb{R} \times G'$, G' beliebige LK-Gruppe

(Typ II) $G = \mathbb{Z} \times G'$, " " "

Da jede kompakt erzeugte abelsche nicht-kompakte LK-Gruppe G entweder vom Typ I oder vom Typ II ist , besitzt also insbesondere $\mathcal{D}'(G)$ bzw. $\mathcal{E}(G)$ für diese Gruppenart kein LILF $\neq 0$.

Im 3. Abschnitt von §4 werden noch einige weitere linksinvariante Teilräume von $\mathcal{D}'(G)$ untersucht , darunter auch der Raum $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) derjenigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, die eine holomorphe Fortsetzung auf den ganzen $\mathbb{C}^n$ besitzen . Für den Fall $n=1$ folgt aus dem Theorem von Guichard aus dem Jahr 1887 (siehe Guichard [1]) , daß $LI_{\{1\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \{0\}$. Es wird nun gezeigt , daß für beliebiges $n \geq 1$ sogar gilt (siehe (4.3.3)) :

(19) $LI_{\{a\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \{0\}$ für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

In §5 wird nun analog wie im 1. Abschnitt von §4 für $\mathcal{D}'(G)$ im Theorem (5.1) eine entsprechende Charakterisierung derjenigen $B \subset G$, G kompakt , die $\dim LI_B(A_1'(G)) = 1$ erfüllen , geben; wie bei $\mathcal{D}'(G)$ gilt die Äquivalenz folgender Aussagen :

- (20) a) $\dim \text{LI}_B(A_1'(G)) = 1$
 b) $\bigcup_{B' \subset B} \dim \text{LI}_{B'}(A_1'(G)) = 1$
 endlich
 und
 c) $\bigcup_{a_1, \dots, a_r \in B} a_1, \dots, a_r$ nicht gleichzeitig P° -approximierbar bzgl. S_0
 (dabei ist P° so, daß $A_{P^\circ}(\Sigma) = \tilde{\mathcal{F}}(A_1'(G))$ und
 S_0 so, daß $\tilde{\mathcal{F}}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G|_{A_1'(G)}) = A_{P^\circ}(S_0)$) .

Im Gegensatz zum Fall $\mathcal{Q}'(G)$ ergibt sich hier bei der Untersuchung von Beispielen, daß (vgl. (5.2)) :

- (21) $\dim \text{LI}_T(A_1'(T)) > 1$
 für die Torusgruppe T .

Da $A_1'(G)$ und $A_1(G)$ wie vorher $\mathcal{Q}'(G)$ und $\mathcal{Q}(G)$ bzgl. ihrer LILF-Probleme in Beziehung gebracht werden können, ergibt sich für abelsche kompakte Gruppen G eine (17) entsprechende Aussage (vgl. (5.5) und (5.9)) .

Im §0, der den beiden Kapiteln dieser Arbeit voransteht, werden die wichtigsten Bezeichnungen, vor allem im Bezug auf den hier benötigten Teil der Darstellungstheorie für kompakte Gruppen, angeführt .

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr.W.Roelcke als dem Betreuer dieser Arbeit für die vielen konstruktiven Gespräche und seine Geduld sehr herzlich danken .

Danken möchte ich auch allen anderen, die zum Entstehen dieser Arbeit beitrugen, vor allem Professor Dr.W.M.Schmidt in Boulder, Colorado, dessen freundliche Bemühungen mir beim Beweis von (16) sehr geholfen haben, und Professor Dr.G.H.Meisters in Lincoln, Nebraska, dessen Arbeiten mich wesentlich angeregt haben und der mich durch sein Interesse ermutigte.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
§0 Vorbemerkungen und Bezeichnungen	1
<u>Kapitel 1</u>	10
<u>Quasilinearformen auf $\mathcal{H}(G/H)$</u>	
§1 Definition und Allgemeines über QILF's	11
§2 Beziehungen zwischen QILF's auf $\mathcal{H}(G/H)$ und LILF's auf $\mathcal{H}(G)$	14
§3 Beziehungen zwischen LILF's auf $\mathcal{H}(H_1 \times H_2)$, $\mathcal{H}(H_1)$, $\mathcal{H}(H_2)$ und $\mathcal{H}(H_1 \times H_2)$	27
§4 Gerade und ungerade LILF's auf $\mathcal{H}(G)$	36
<u>Kapitel 2</u>	
<u>LILF's auf Distributionen- und Funktionenräumen und P-Approximierbarkeit von Elementen kompakt-erzeugter LK-Gruppen</u>	48
§1 Die Räume $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{D}(G)$ und $\mathcal{D}'(G)$ für LK-Gruppen G und Vererbungseigenschaften für LILF's auf diesen Räumen	49
1.1 Definition der Räume $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{D}(G)$ und $\mathcal{D}'(G)$	49
1.2 Vererbungseigenschaften für LILF's auf $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{D}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$	58
§2 Die Algebren $\mathcal{A}_p(S)$	73
2.1 Definition und allgemeine Eigenschaften der Algebren $\mathcal{A}_p(S)$	75
2.2 Zusammenhang mit den Fouriertransformierten von Distributionen	81
2.3 Ein Erzeugungstheorem für $\mathcal{A}_p(S)$	90
§3 Nicht gleichzeitig P-approximierbare Elemente von LK-Gruppen	99
3.1 Nicht-gleichzeitige P-Approximierbarkeit von Elementen kompakter Gruppen	101
3.2 Nicht-gleichzeitige P-Approximierbarkeit in beliebigen LK-Gruppen	117

§4 Das LILF-Problem auf $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{Q}'(G)$, $\mathcal{Q}(G)$ und $\mathcal{E}(G)$	119
4.1 Die Fälle $\mathcal{E}'(G)$ und $\mathcal{Q}(G)$	119
4.2 Die Fälle $\mathcal{Q}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$ für nicht-kompaktes G	137
4.3 Weitere linksinvariante Teilräume E von $\mathcal{Q}'(G)$ mit $E = \Delta(E)$	148
§5 Das LILF-Problem auf $A_1'(G)$ und $A_1(G)$	154
Literaturverzeichnis	161

§0 Vorbemerkungen und Bezeichnungen

$\mathbb{N}$:= Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z}$:= Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{R}$:= Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$T := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ "Torusgruppe"

$\mathbb{C}$:= Menge der komplexen Zahlen

$|\cdot|: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sei die übliche Betragsfunktion

$S_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichne $\bar{z}$ die konjugiert komplexe Zahl.

Sei M eine Menge, $B \subset M$. $\chi_B: M \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
sei die Indikatorfunktion von B in M .

Ist X ein topologischer Raum, $B \subset X$, so bezeichnen wir mit $\bar{B}$ bzw. $\overset{\circ}{B}$ die abgeschlossene Hülle bzw. den offenen Kern von B bzgl. X .

Für einen linearen Raum E sei E^* das algebraische Dual von E .

(0.1) LK-Gruppen und lokalkompakte homogene Räume

Sei G eine separierte topologische Gruppe (es sollen nur solche betrachtet werden).

G heißt LK-Gruppe, wenn G lokalkompakt ist.

Unter einer kompakten Gruppe wollen wir stets eine kompakte LK-Gruppe verstehen.

e bezeichne das Einselement von G .

Für $x \in G$ sei $\mathcal{U}_x(G)$ der Umgebungsfilter von x in G .

Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G .

Mit G/H bezeichnen wir den topologischen homogenen (separierten) Raum der Linksklassen modulo H (d.h. $G/H = \{xH \mid x \in G\}$) mit der Quotiententopologie bzgl. der kanonischen Surjektion

$$\pi_H: G \longrightarrow G/H, \quad x \longmapsto xH.$$

Ist G eine LK-Gruppe, so ist auch G/H lokalkompakt.

Ist H ein Normalteiler von G , so ist G/H eine (separierte) topologische Gruppe.

(0.2) Die Räume $C(G/H)$, $\mathcal{K}(G/H)$, $C_0(G/H)$

Sei G eine LK-Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe von G .

$$C(G/H) := \{f : G/H \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$$

Sei $f \in C(G/H)$.

$\text{supp } f := \overline{\{xH \in G/H \mid f(xH) \neq 0\}} \subset G/H$ heißt Träger von f .

$$\mathcal{K}(G/H) := \{f \in C(G/H) \mid \text{supp } f \text{ kompakt}\}$$

$$\mathcal{K}_+(G/H) := \{f \in \mathcal{K}(G/H) \mid \bigvee_{x \in G} f(xH) \geq 0\}$$

$$C_0(G/H) := \{f \in C(G/H) \mid \bigvee_{\varepsilon > 0} \big\{ \bigvee_{\substack{K \subset G/H \\ K \text{ kompakt}}} \bigvee_{x \in (G/H) \setminus K} |f(xH)| < \varepsilon \big\}\}$$

(Raum der "im Unendlichen verschwindenden" Funktionen).

Speziell: $H := \{e\}$. Dann kann G mit $G/\{e\}$ identifiziert werden und es sei $C(G) := C(G/\{e\})$; $\mathcal{K}(G)$, $\mathcal{K}_+(G)$, $C_0(G)$ werden entsprechend definiert.

(0.3) Translationen, Haarintegral und Modularfunktion

Sei G eine LK-Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe von G . G operiert vermöge

$$l_{G,H} : G \times C(G/H) \rightarrow C(G/H), (a, f) \mapsto {}^a f, \\ {}^a f(xH) := f(a^{-1}xH) \quad (x \in G) \text{ für } a \in G, f \in C(G/H)$$

von links auf $C(G/H)$.

Teilräume E von $C(G/H)$ mit $l_{G,H}(G \times E) \subset E$ bezeichnen wir als linksinvariant.

Insbesondere sind $\mathcal{K}(G/H)$ und $C_0(G/H)$ linksinvariant.

Sei $\mu_G : \mathcal{K}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ das linke Haarintegral von G , d.h. μ_G ist das bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmte lineare Funktional $\neq 0$ auf $\mathcal{K}(G)$ mit

$$1) \mu_G({}^a f) = \mu_G(f) \text{ für alle } f \in \mathcal{K}(G), a \in G$$

("Linksinvarianz")

$$2) \mu_G(f) \geq 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{K}_+(G)$$

("Positivität")

Weiter operiert G mittels

$r_G : C(G) \times G \longrightarrow C(G)$, $(f, a) \mapsto f^a$ mit
 $f^a(x) := f(xa^{-1})$ ($x \in G$) für $f \in C(G)$, $a \in G$

von rechts auf $C(G)$.

Teilräume E von $C(G)$ mit $r_G(E \times G) \subset E$ bezeichnen wir als rechtsinvariant ; wir nennen E (bi)invariant , falls E links- und rechtsinvariant ist .

$\Delta_G : G \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ sei die linke Modularfunktion von G , d.h.

$$\Delta_G(a) = \frac{\mu_G(f^a)}{\mu_G(f)} \quad \text{für } a \in G \text{ und beliebiges } f \in \mathcal{H}_+(G) \setminus \{0\}$$

(vgl. Hewitt/Ross [1] , (15.11)) .

(0.4) Die entgegengesetzte Gruppe

Sei G eine LK-Gruppe.

Wir bezeichnen als entgegengesetzte Gruppe von G die Gruppe G^* mit $G^* = G$ (mengenmäßig und topologisch) und den Gruppenoperationen

$$G^* \times G^* \longrightarrow G^* , (x, y) \mapsto x \cdot y := yx \quad \text{und} \quad G^* \rightarrow G^* , x \mapsto x^{-1} .$$

G^* ist ebenfalls eine LK-Gruppe mit $\mathcal{H}(G^*) = \mathcal{H}(G)$,

$$\mu_{G^*}(f) = \mu_G\left(\frac{f}{\Delta_G}\right) \quad \text{für } f \in \mathcal{H}(G) .$$

(0.5) Erzeugte Untergruppe, erzeugter Normalteiler

Sei G eine beliebige Gruppe , $B \subset G$.

$$[B] := \bigcap \{ H \subset G \mid H \text{ Untergruppe von } G , H \supset B \}$$

heißt die von B in G erzeugte Untergruppe .

$$N(B) := \bigcap \{ N \subset G \mid N \text{ Normalteiler von } G , N \supset B \}$$

heißt der von B in G erzeugte Normalteiler .

(0.6) Hilberträume

Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$,
 $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$ (Linearität im 1. Argument, Antilinearität im 2. Argument) und Norm $\| \cdot \| : H \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Sei $r \in \mathbb{N}^*$, $H_1, \dots, H_r$ Hilberträume über $\mathbb{C}$.

Dann ist der Vektorraum

$$\bigoplus_{k=1}^r H_k := \{ (\xi_1, \dots, \xi_r) \mid \forall_{1 \leq k \leq r} \xi_k \in H_k \}$$

mit dem Skalarprodukt

$$((\xi_1, \dots, \xi_r), (\eta_1, \dots, \eta_r)) \mapsto \sum_{k=1}^r \langle \xi_k, \eta_k \rangle_k$$

(dabei sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ das Skalarprodukt von H_k)

ebenfalls ein Hilbertraum, die sog. Hilbertraumsumme von $H_1, \dots, H_r$.

Für einen Hilbertraum H über $\mathbb{C}$ sei

$$B(H) := \{f : H \longrightarrow H \mid f \text{ linear und stetig}\}.$$

Sei $f \in B(H)$.

Mit f^* bezeichnen wir die Adjungierte von f , (d.h. für $\xi, \eta \in H$ $\langle f(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, f^*(\eta) \rangle$), $f^* \in B(H)$.

f heißt normal, wenn $f \circ f^* = f^* \circ f$.

f heißt unitär, wenn $\|f(\xi)\| = \|\xi\|$ für alle $\xi \in H$.

$$U(H) := \{f \in B(H) \mid f \text{ unitär}\}.$$

f heißt positiv definit, wenn $\langle f(\xi), \xi \rangle \geq 0$ für alle $\xi \in H$.

Da $f \circ f^*$ ($f \in B(H)$) positiv definit ist, folgt aus Hewitt/Ross [1], (C.35), daß es ein eindeutig bestimmtes Element $|f| \in B(H)$, $|f|$ positiv definit, mit $|f|^2 := |f| \circ |f| = f \circ f^*$ gibt.

Ist H endlichdimensional, $\dim H = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, so kann man daher folgende Normen auf $B(H)$ definieren:

$\|\cdot\|_{\varphi_1} : B(H) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die in ihren Vielfachheiten aufgeführten Eigenwerte von $|f|$ seien,

$\|\cdot\|_{\varphi_\infty} : B(H) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f \longmapsto \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie oben)

(siehe Hewitt/Ross [2], (D.37)).

(0.7) Das duale Objekt einer kompakten Gruppe

Sei G eine kompakte Gruppe.

Sei H ein endlichdimensionaler Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $\dim H = n \geq 1$; $\xi_1, \dots, \xi_n$ sei eine Orthonormalbasis von H .

Unter einer unitären Darstellung von G in H verstehen wir einen Gruppenhomomorphismus

$$V : G \longrightarrow U(H), \quad a \longmapsto V_a \quad (\text{d.h. } V_{ab} = V_a \circ V_b \text{ für alle } a, b \in G).$$

H heißt Darstellungsraum von V , n Dimension von V .

V heißt stetig, wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildungen $V_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \longmapsto \langle V_a(\xi_i), \xi_j \rangle$ stetig sind.

V heißt reduzibel, wenn es einen echten Teilraum $H_0 \neq \{0\}$ von H gibt mit $V_a(H_0) \subset H_0$ für alle $a \in G$.

Wenn V nicht reduzibel ist, heißt V irreduzibel.

Seien H_1, H_2 endlichdimensionale Hilberträume über $\mathbb{C}$,
 $V^{(1)}: G \rightarrow U(H_1)$, $V^{(2)}: G \rightarrow U(H_2)$ seien stetige unitäre
 Darstellungen.
 $V^{(1)}$ und $V^{(2)}$ heißen äquivalent, wenn es einen isometrischen
 Isomorphismus $I: H_1 \rightarrow H_2$ gibt mit: $V_a^{(1)} = I^{-1} \circ V_a^{(2)} \circ I$
 für alle $a \in G$.

Wir bezeichnen mit Σ die Menge aller Äquivalenzklassen von
 stetigen unitären irreduziblen Darstellungen von G ; Σ heißt
duales Objekt von G .

Sei X eine Teilmenge von G .

$$A(\Sigma, X) := \left\{ \sigma \in \Sigma \mid \bigcap_{U^{(\sigma)} \in \sigma} \bigcap_{x \in X} U_x^{(\sigma)} = \text{id} \right\} = \left\{ \sigma \in \Sigma \mid X \subset \text{Kern } U^{(\sigma)} \right\}$$

heißt Annihilator von X .

Sei P eine Teilmenge von Σ .

$$A(G, P) := \left\{ x \in G \mid \bigcap_{\sigma \in P} \bigcap_{U^{(\sigma)} \in \sigma} U_x^{(\sigma)} = \text{id} \right\} = \left\{ x \in G \mid x \in \text{Kern } U^{(\sigma)} \right\}$$

heißt Annihilator von P .

Direkte Summe, Tensorprodukt und Konjugation von Darstellungen:

Seien $V^{(1)} (1 \leq i \leq m)$ stetige unitäre Darstellungen von G mit
 den Darstellungsräumen $H_1 (1 \leq i \leq m)$; sei $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}$ eine
 Orthonormalbasis von $H_1 (1 \leq i \leq n_1)$.

Dann gibt es genau eine stetige unitäre Darstellung

$$V: G \rightarrow U\left(\bigoplus_{i=1}^m H_i\right), a \mapsto V_a, \text{ von } G \text{ in } \bigoplus_{i=1}^m H_i \text{ mit}$$

$$V_a(\xi_i^{(1)}) = V_a^{(1)}(\xi_i^{(1)}) \quad (1 \leq i \leq n_1, 1 \leq i \leq m)$$

(Hewitt/Ross [2], (27.29)d)).

$$V =: V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(m)} \text{ heißt direkte Summe von } V^{(1)}, \dots, V^{(m)}.$$

Im Falle $V^{(1)} = \dots = V^{(m)}$ schreibt man auch $V =: mV^{(1)}$.

Ist $V: G \rightarrow U(H)$ (H endlichdimensionaler Hilbertraum) eine
 stetige unitäre Darstellung, so gibt es stetige unitäre irre-
 reduzible Darstellungen $V^{(1)}, \dots, V^{(m)}$ von G , die paarweise nicht
 äquivalent sind, und $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}^*$, so daß

$$V = s_1 V^{(1)} \oplus \dots \oplus s_m V^{(m)}.$$

Diese Darstellung ist eindeutig in dem Sinn, daß aus der Äquivalenz von V und einer direkten Summe $r_1 \tilde{V}^{(1)} \oplus \dots \oplus r_m \tilde{V}^{(m')}$ für gewisse stetige unitäre irreduzible Darstellungen $\tilde{V}^{(1)}, \dots, \tilde{V}^{(m')}$ von G , die nicht paarweise äquivalent sind, und $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}^*$ folgt:

$m = m'$, $\tilde{V}^{(j)}$ ist äquivalent zu $V^{(\pi(j))}$, $r_j = s_{\pi(j)}$ ($1 \leq j \leq m$), wobei π eine geeignete Permutation der Menge $\{1, \dots, m\}$ ist (Hewitt/Ross [1], (21.40)a), Hewitt/Ross [2], (27.30)).

$V^{(1)}: G \rightarrow U(H_1)$, $V^{(2)}: G \rightarrow U(H_2)$ seien irreduzible stetige unitäre Darstellungen von G .

Dann gibt es genau ein $V: G \rightarrow U(H_1 \otimes H_2)$, $a \mapsto V_a$, mit $V_a(\xi_1 \otimes \xi_2) = V_a^{(1)}(\xi_1) \otimes V_a^{(2)}(\xi_2)$ für $\xi_1 \in H_1$, $\xi_2 \in H_2$ für alle $a \in G$ (" $\otimes$ " bezeichne dabei das Tensorprodukt).

V ist eine stetige unitäre Darstellung von G in $H_1 \otimes H_2$;

$V =: V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ heißt Tensorprodukt von $V^{(1)}$ und $V^{(2)}$.

(Hewitt/Ross [2], (27.33)).

Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $U^{(1)} \in \sigma_1$, $U^{(2)} \in \sigma_2$.

Dann gibt es $\tau_1, \dots, \tau_m \in \Sigma$, $V^{(j)} \in \tau_j$ ($1 \leq j \leq m$), so daß $U^{(1)} \otimes U^{(2)} = s_1 V^{(1)} \oplus \dots \oplus s_m V^{(m)}$ für geeignete $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}^*$ (siehe oben).

Aufgrund der Eindeutigkeit dieser Darstellung ist das Produkt

$\sigma_1 \times \sigma_2 := \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ von σ_1 und σ_2 wohldefiniert.

Für $P \in \Sigma$ sei $P \times P := \bigcup \{\sigma_1 \times \sigma_2 \mid \sigma_1, \sigma_2 \in P\}$.

Sei $V: G \rightarrow U(H)$ (H endlichdimensionaler Hilbertraum) eine irreduzible stetige unitäre Darstellung.

Dann ist auch $\bar{V}: G \rightarrow U(H)$, $a \mapsto \bar{V}_a$ mit

$\langle \bar{V}_a(\xi_i), \xi_j \rangle := \overline{\langle V_a(\xi_i), \xi_j \rangle}$ ($1 \leq i, j \leq n$)

($\xi_1, \dots, \xi_n$ sei eine Orthonormalbasis von H)

eine irreduzible stetige unitäre Darstellung von G in H .

$\bar{V}$ bezeichnen wir als Konjugierte von V .

Sei $\sigma \in \Sigma$, $U^{(\sigma)} \in \sigma$.

Dann heißt die Äquivalenzklasse $\bar{\sigma}$ von $\bar{U}^{(\sigma)}$ Konjugierte von σ .

(Aus Hewitt/Ross [2], (27.26) folgt: Ist $\tilde{U}^{(\sigma)} \in \sigma$, so ist $\tilde{U}^{(\sigma)}$ äquivalent zu $\bar{U}^{(\sigma)}$; wird bei der Definition der Konjugation eine andere Orthonormalbasis zugrundegelegt, so bewirkt dies nur eine Abänderung der Konjugierten innerhalb ihrer Äquivalenzklasse.)

Für $P \in \Sigma$ sei $\bar{P} := \{\bar{\sigma} \mid \sigma \in P\}$;

$$[P] := \bigcap \{P' \in \Sigma \mid P' \supset P, P' \supset P' \times P', P' \supset \bar{P}'\}$$

δ_σ bezeichne stets die Äquivalenzklasse von $U^\sigma : G \longrightarrow U(\mathbb{C})$,
 $U_a^\sigma(\xi) = \xi$ für $a \in G$, $\xi \in \mathbb{C}$ ("triviale Darstellung").

(0.8) Fouriertransformation auf kompakten Gruppen

Sei G eine kompakte Gruppe, Σ ihr duales Objekt.

Sei $\mathcal{U} = (U^{(\sigma)})_{\sigma \in \Sigma}$ ein Repräsentantensystem der Elemente von Σ ; für jedes $\sigma \in \Sigma$ sei H_σ der Darstellungsraum von $U^{(\sigma)}$,
 $d_\sigma = \dim H_\sigma$, $\xi_1^{(\sigma)}, \dots, \xi_{d_\sigma}^{(\sigma)}$ eine Orthonormalbasis von H_σ .

$\mathcal{E}(\Sigma) := \prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma)$ ist eine Algebra bzgl. der komponentenweisen Addition, Komposition und skalaren Multiplikation.

Sei $f \in \mathcal{E}(\Sigma)$, $f = (f(\sigma))_{\sigma \in \Sigma}$.

$$\|f\|_1 := \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \|f(\sigma)\|_{\mathcal{U}_1} \quad (\text{siehe (0.6)})$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{\sigma \in \Sigma} \|f(\sigma)\|_{\mathcal{U}_\infty} \quad (\quad " \quad " \quad).$$

$$\mathcal{E}_1(\Sigma) := \{f \in \mathcal{E}(\Sigma) \mid \|f\|_1 < \infty\}$$

$$\mathcal{E}_\infty(\Sigma) := \{f \in \mathcal{E}(\Sigma) \mid \|f\|_\infty < \infty\}.$$

$\mathcal{E}_1(\Sigma)$ und $\mathcal{E}_\infty(\Sigma)$ sind bzgl. $\|\cdot\|_1 : \mathcal{E}_1(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$,
 $f \longmapsto \|f\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{E}_\infty(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \|f\|_\infty$
 normierte Räume.

Die Abbildung $\mathcal{E}_\infty(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{E}_1(\Sigma)$, $F = (F_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \longmapsto T_F$
 mit $T_F((E_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}) := \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \text{Spur}(E_\sigma \circ F_\sigma)$ (für $(E_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in \mathcal{E}_1(\Sigma)$)
 ist ein isometrischer Isomorphismus
 (vgl. Hewitt/Ross [2], (28.31)).

Die (von $\mathcal{U}$ abhängende) Fouriertransformation $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$
 wird definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{K}(G) &\longrightarrow \mathcal{E}(\Sigma), \quad \langle \mathcal{F}(f)(\sigma) \xi_i^{(\sigma)}, \xi_j^{(\sigma)} \rangle := \\ &= \int_G f(x) \langle \bar{U}_x^{(\sigma)} \xi_i^{(\sigma)}, \xi_j^{(\sigma)} \rangle d\mu_G(x) \end{aligned}$$

(für $f \in \mathcal{K}(G)$, $\sigma \in \Sigma$, $1 \leq i, j \leq d_\sigma$).

Man hat für $f \in \mathcal{K}(G)$, $\sigma \in \Sigma$:

$$(0.9) a) \mathcal{F}(af)(\sigma) = \bar{U}_a^{(\sigma)} \mathcal{F}(f)(\sigma) \quad \text{für alle } a \in G;$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Spur}(\mathcal{F}(\check{f})(\sigma)) &= \text{Spur}(\mathcal{F}(f)(\bar{\sigma})) \\ \text{für } \check{f} : G &\longrightarrow G, \check{f}(x) := f(x^{-1}), \check{f} \in \mathcal{K}(G) \text{ .} \\ &(\text{wegen Hewitt/Ross [2], (28.37)ii}) \end{aligned}$$

Definiert man die Faltung auf $\mathcal{H}(G)$ durch :

$$\begin{aligned} * : \mathcal{H}(G) \times \mathcal{H}(G) &\longrightarrow \mathcal{H}(G), \quad (f, g) \longmapsto f * g \quad \text{mit} \\ f * g(x) &:= \int_G f(y)g(y^{-1}x) \, d\mu_G(y) \cdot \\ &\quad (\text{für } x \in G) \end{aligned}$$

(vgl. Hewitt/Ross [1], (20.16)),

so ist $\mathcal{H}(G)$ bzgl. der argumentweisen Addition, der skalaren Multiplikation und der Faltung eine Algebra; aus Hewitt/Ross [2], (28.36) folgt, daß $\mathcal{F}$ ein injektiver Algebra-Homomorphismus ist.

Wegen (0.9)a) ist $A_1(G) := \{f \in \mathcal{H}(G) \mid \mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}_1(\Sigma)\}$ ein linksinvarianter Teilraum von $\mathcal{H}(G)$. Versieht man $A_1(G)$ mit der von $\mathcal{E}_1(\Sigma)$ induzierten Normtopologie, so stellen die Abbildungen $A_1(G) \longrightarrow A_1(G)$, $f \longmapsto {}^a f$ ($a \in G$) Isometrien auf $A_1(G)$ dar.

Sei $A_1^*(G) := (A_1(G))'$ das starke Dual von $A_1(G)$ ("Raum der Pseudomaße auf G ").

Dann operiert G auch auf $A_1^*(G)$ vermöge

$$G \times A_1^*(G) \longrightarrow A_1^*(G), \quad (a, S) \longmapsto {}^a S, \quad \text{wobei } {}^a S(f) := S({}^{a^{-1}} f) \text{ für } f \in A_1(G).$$

Anmerkung: Im folgenden wird bei Erwähnung der Fouriertransformation auf $\mathcal{H}(G)$ für eine kompakte Gruppe G immer (außer wenn etwas anderes gesagt wird) vorausgesetzt, daß zuvor ein Repräsentantensystem $\mathcal{U} = (U^{(\sigma)})_{\sigma \in \Sigma}$ ausgewählt worden ist, auf das sich $\mathcal{F}$ bezieht.

(0.10) Dualgruppe einer abelschen LK-Gruppe, Fouriertransformation im abelschen Fall

Sei G eine abelsche LK-Gruppe.

$\xi : G \longrightarrow S_1$ heißt Charakter, wenn ξ ein Gruppenhomomorphismus ist (bzgl. der Multiplikation von G und der üblichen Multiplikation auf $\mathbb{C}$).

$\hat{G} := \{ \xi : G \longrightarrow S_1 \mid \xi \text{ stetiger Charakter} \}$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G ist eine abelsche LK-Gruppe; sie heißt Dualgruppe von G (siehe Hewitt/Ross [1], (23.15)).

Die Abbildung $[\cdot, \cdot] : G \times \hat{G} \rightarrow S_1$, $(x, \xi) \mapsto \xi(x)$

ist stetig in beiden Argumenten.

Sei $\varphi : T \rightarrow S_1$, $x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i x}$.

Da φ ein topologischer Isomorphismus ist, kann man auch definieren:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : G \times \hat{G} \rightarrow T, (x, \xi) \mapsto \varphi^{-1}([\cdot, \xi])$$

Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G .

$$H^\perp := \{ \xi \in \hat{G} \mid \xi(x) = 1 \text{ für alle } x \in H \}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\hat{G}$ mit $H^\perp \cong (G/H)^\wedge$.

Die Fouriertransformation ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{K}(G) &\rightarrow C_0(\hat{G}), f \mapsto \mathcal{F}(f) \text{ mit} \\ \mathcal{F}(f)(\xi) &:= \int_G f(x) \overline{\xi(x)} d\mu_G(x) \quad \text{für } f \in \mathcal{K}(G), \xi \in \hat{G}. \end{aligned}$$

Definiert man die Faltung wieder wie in (0.9), so ist $\mathcal{F}$ ein injektiver Algebra-Homomorphismus ($C_0(\hat{G})$ ist eine Algebra bzgl. der argumentweisen Addition, Multiplikation und skalaren Multiplikation) (Rudin [1], (1.2.4)).

Ist G zusätzlich kompakt, so ist $\hat{G}$ diskret und kann mit dem dualen Objekt Σ identifiziert werden (denn da G abelsch ist, bestehen alle Klassen von Σ nur aus einem 1-dimensionalen Element, das mit einem $\xi \in \hat{G}$ identifiziert werden kann: Hewitt/Ross [2], (27.4)). Der in (0.8) definierte Begriff der Fouriertransformation stimmt dann mit dem obigen überein. $\mathcal{E}_1(\Sigma)$ reduziert sich zu $l_1(\hat{G}) := \{ f : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{\xi \in \hat{G}} |f(\xi)| < \infty \}$, $\mathcal{E}_\infty(\Sigma)$ zu $l_\infty(\hat{G}) := \{ f : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sup_{\xi \in \hat{G}} |f(\xi)| < \infty \}$.

Kapitel 1

Quasiinvariante Linearformen auf $\mathcal{H}(G/H)$

§1 Definition und Allgemeines über QILF's

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe.

Auf $\mathcal{K}(G/H)$ existiert genau dann ein positives lineares Funktional $\mu_{G/H} \neq 0$ (positiv bedeuten, daß für $f \in \mathcal{K}_+(G/H)$, $f \neq 0$ gilt: $\mu_{G/H}(f) > 0$), das bezüglich der durch (0.3) auf $\mathcal{K}(G/H)$ induzierten Translationen $f \mapsto {}^a f$ ($f \in \mathcal{K}(G/H)$, $a \in G$) invariant ist (d.h. $\mu_{G/H}({}^a f) = \mu_{G/H}(f)$ für $f \in \mathcal{K}(G/H)$, $a \in G$), wenn $\Delta_G|_H = \Delta_H$ (Weil [1], 9.)

Es gibt jedoch stets eine stetige Funktion $q : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mit folgender Eigenschaft:

$$(1.0) \quad q(xy) = q(x) \frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)} \quad \text{für alle } x \in G, y \in H$$

und ein positives lineares Funktional $\mu_{G/H} \neq 0$ auf $\mathcal{K}(G/H)$ mit:

$$(1.1) \quad \mu_{G/H}({}^a f) = \mu_{G/H}(\lambda_a f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{K}(G/H), a \in G;$$

$$\text{dabei sei } \lambda_a : G/H \rightarrow \mathbb{R}_+^*, xH \mapsto \frac{q(ax)}{q(x)} \quad (a \in G)$$

(λ_a ($a \in G$) ist wegen (1.0) offenbar wohldefiniert; da q stetig ist, sind auch alle λ_a ($a \in G$) stetig).

Die Eigenschaft (1.1) wird als "Quasiinvarianz" bezeichnet (Reiter [1], Chap. 8, 1.2, 1.3, 1.6).

Wir werden daher im Folgenden auf $\mathcal{K}(G/H)$ nicht nur Linearformen betrachten, die bezüglich der Linkstranslationen "vollinvariant" sind, sondern auch solche, die immerhin noch eine mit (1.1) vergleichbare Bedingung erfüllen:

(1.2) Definition

Sei $\lambda : G \times G/H \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mit folgender Eigenschaft:

Die Abbildungen $\lambda_a : G/H \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $xH \mapsto \lambda(a, xH)$ sind stetig für alle $a \in G$.

Sei $B \subset G$ beliebig, $M \in \mathcal{K}(G/H)^*$.

M heißt B-quasiinvariant oder B-QILF bzgl. λ , wenn gilt:

$$M({}^a f) = M(\lambda_a f) \quad \text{für alle } a \in B, f \in \mathcal{K}(G/H).$$

Die Menge der B-QILF's bzgl. λ stellt in $\mathcal{K}(G/H)^*$ offen-

bar einen linearen Teilraum dar, den wir mit $QI_B(\lambda, \mathcal{H}(G/H))$ bezeichnen werden.

Speziell: $QI(\lambda, \mathcal{H}(G/H)) := QI_G(\lambda, \mathcal{H}(G/H))$.

Im folgenden werden wir uns darauf beschränken, Abbildungen $\lambda : G \times G/H \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ zu betrachten, die mit gewissen stetigen Funktionen $q : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ zusammenhängen:

(1.3) Definition

Sei $q : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ stetig.

q heißt quasi-H-Homomorphismus, wenn gilt:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \equiv \\ h_q : H \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \text{homomorphismus} \end{array} & \begin{array}{c} \bigvee \\ x \in G \end{array} & \begin{array}{c} \bigvee \\ y \in H \end{array} \quad \frac{q(xy)}{q(x)} = h_q(y) \end{array}$$

Offenbar ist jede stetige Funktion $q : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vom Typ (1.0) ein quasi-H-Homomorphismus.

(1.4) Sei $q : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi-H-Homomorphismus.

Dann ist offenbar

$$\lambda^q : G \times G/H \rightarrow \mathbb{R}_+^*, (y, xH) \mapsto \frac{q(yx)}{q(x)}$$

wohldefiniert, die Abbildungen

$$\lambda_a^q : G/H \rightarrow \mathbb{R}_+^*, xH \mapsto \lambda^q(a, xH) \quad (a \in G)$$

sind stetig. Es gilt:

$$(1.5) \quad \lambda_a^{q^{-1}} = {}^a \left(\frac{1}{\lambda_a^q} \right) \text{ und } \lambda_{ab}^q = {}^{b^{-1}} \left(\lambda_a^q \right) \lambda_b^q \quad \text{für } a, b \in G.$$

Für $B \subset G, B \neq \emptyset$, folgt:

$$(1.6) \quad QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H)) = QI_{[B]}(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H)),$$

denn sei $M \in QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H))$, $f \in \mathcal{H}(G/H)$, $a \in B$, $b \in B$, so gilt:

$$\lambda_a^{q^{-1}} f - {}^{\bar{a}^{-1}} f = ({}^{\bar{a}^{-1}} f) - {}^a \left(\frac{1}{\lambda_a^q} ({}^{\bar{a}^{-1}} f) \right) \quad (\text{wegen (1.5)}) \text{, d.h.}$$

$$M(\lambda_a^{q^{-1}} f - {}^{\bar{a}^{-1}} f) = 0 \text{ ,}$$

$$\lambda_{ab}^q f - {}^{ab} f = {}^{b^{-1}} (\lambda_a^q {}^{b_f}) \lambda_b^q - \lambda_a^q {}^{b_f} + \lambda_a^q {}^{b_f} - {}^a ({}^{b_f}) \quad ((1.5)),$$

$$\text{d.h. } M(\lambda_{ab}^q f - {}^{ab} f) = 0.$$

Wegen $[B] = \{b_1^{\varepsilon_1} \dots b_r^{\varepsilon_r} \mid r \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{-1, +1\}, b_1, \dots, b_r \in B\}$ folgt nun (1.6) durch Induktion.

Ist $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so ist q offenbar ein quasi-H-Homomorphismus; für das zugehörige λ^q gilt: Die Abbildungen λ_a^q ($a \in G$) sind konstant, $\lambda_a^q(xH) = q(a)$ für alle $x \in G$ ($a \in G$)¹⁾.

Wir definieren deshalb:

(1.7) Definition

Sei $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Weiter sei $B \subset G$, $M \in \mathcal{K}(G/H)^*$.

M heißt B-relativinvariant oder B-RELF bzgl. q, wenn gilt:

$$M(a f) = q(a) M(f) \quad \text{für alle } a \in B, f \in \mathcal{K}(G/H)$$

$$(\iff M \in QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H)).$$

$$REL_B(q, \mathcal{K}(G/H)) := QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H)),$$

$$REL(q, \mathcal{K}(G/H)) := REL_G(q, \mathcal{K}(G/H)).$$

In dem speziellen Fall, daß $q = 1$, sagen wir statt "B-relativinvariant bzgl. q" "B-linksinvariant", statt "B-RELF" "B-LILF".

$$LI_B(\mathcal{K}(G/H)) := REL_B(1, \mathcal{K}(G/H)),$$

$$LI(\mathcal{K}(G/H)) := LI_G(\mathcal{K}(G/H)).$$

1) Man überlegt sich leicht, daß umgekehrt gilt: Ist λ_a^q ($a \in G$) konstant für einen quasi-H-Homomorphismus q , so ist $\frac{1}{q(e)} q$ ein (stetiger) Gruppenhomomorphismus.

§2 Beziehungen zwischen QILF's auf $\mathcal{K}(G/H)$ und LILF's auf $\mathcal{K}(G)$

Seien G und H wie in §1. Ist H Normalteiler von G , so ist die Abbildung

$$(2.1) \quad T_H : \mathcal{K}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G/H) \quad , \quad T_H(f)(xH) := \int_H f(xy) d\mu_H(y) \\ \text{(für } f \in \mathcal{K}(G) \text{ , } x \in G)$$

ein (stetiger) Epimorphismus mit der Eigenschaft

$$(2.2) \quad T_H(a \cdot f) = a \cdot T_H(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{K}(G) \text{ , } a \in G .$$

Die Transponierte von T_H (im algebraischen Sinn), die Abbildung $T_H^t : \mathcal{K}(G/H)^* \longrightarrow \mathcal{K}(G)^*$, $M \longmapsto M \circ T_H$, induziert deshalb einen Isomorphismus von $LI(\mathcal{K}(G/H))$ auf einen linearen Teilraum von $LI(\mathcal{K}(G))$ ¹⁾; ist H diskret, so gilt sogar:

$$(2.3) \quad LI(\mathcal{K}(G/H)) \cong LI(\mathcal{K}(G))$$

(siehe Roelcke et al. [1], 3. Prop. und 5. Theorem, Asam [1], §6).

Im folgenden soll gezeigt werden, daß im allgemeinen Fall, d.h. wenn für H nur vorausgesetzt wird, abgeschlossene Untergruppe von G zu sein, ein entsprechender Zusammenhang zwischen $QI(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))$ und $LI(\mathcal{K}(G))$ besteht (dabei sei $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi- H -Homomorphismus).

Zunächst läßt sich feststellen, daß auch im allgemeinen Fall T_H wie in (2.1) definiert werden kann und daß ebenfalls gilt: T_H ist ein Epimorphismus und erfüllt (2.2) entsprechend (Reiter [1], Chap. 3, 4.2).

Ist $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi- H -Homomorphismus, so definieren wir:

$$(2.4) \quad T_{H,q} : \mathcal{K}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G/H) \quad , \quad T_{H,q}(f) := T_H\left(\frac{1}{q} f\right) .$$

$T_{H,q}$ ist offenbar ebenfalls surjektiv, es gilt sogar:

$$(2.5) \quad T_{H,q}(\mathcal{K}_+(G)) = \mathcal{K}_+(G/H) .$$

(Denn aus Reiter [1], Chap. 3, 4.2 folgt für $f \in \mathcal{K}_+(G/H)$: $f = T_H(g_0)$ für geeignetes $g_0 \in \mathcal{K}_+(G)$; für $g = qg_0$ gilt dann $T_{H,q}(g) = f$. Andererseits hat man wegen der Positivität von

1) mit $LI(\mathcal{K}(G)) := LI_G(\mathcal{K}(G/\{e\}))$ (vgl. (0.2)).

$$\mu_H : T_{H,q}(\mathcal{K}_+(G)) \subset \mathcal{K}_+(G/H) .)$$

Analog zu (2.2) gilt für $T_{H,q}$: (mit λ^q wie in (1.4))

$$(2.6) \quad T_{H,q}(af) = \lambda_{a^{-1}}^q {}^aT_{H,q}(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{K}(G), a \in G .$$

$$\begin{aligned} (\text{denn : } T_{H,q}(af) &= T_H\left(\frac{1}{q} af\right) \stackrel{(2.2)}{=} {}^aT_H\left(\frac{1}{a^{-1}q} f\right) = {}^aT_H\left(\frac{1}{\lambda_a^q} \frac{1}{q} f\right) = \\ &= {}^a\left(\frac{1}{\lambda_a^q}\right) {}^aT_{H,q}(f) \stackrel{(1.5)}{=} \lambda_{a^{-1}}^q {}^aT_{H,q}(f) \quad (f \in \mathcal{K}(G), a \in G)). \end{aligned}$$

Weiter hat man: (mit h_q wie in (1.3))

$$(2.7) \quad T_{H,q}(f^a) = h_q(a^{-1}) \Delta_H(a) T_{H,q}(f) \quad \text{für } f \in \mathcal{K}(G), a \in H$$

$$\begin{aligned} (\text{denn : } T_{H,q}(f^a) &= T_H\left(\frac{1}{q} f^a\right) = \Delta_H(a) T_H\left(\frac{1}{qa^{-1}} f\right) = \\ &= h_q(a^{-1}) \Delta_H(a) T_H\left(\frac{1}{q} f\right) = h_q(a^{-1}) \Delta_H(a) T_{H,q}(f) \\ &\quad (f \in \mathcal{K}(G), a \in H)) . \end{aligned}$$

Für den Träger von $T_{H,q}(f)$ ($f \in \mathcal{K}(G)$) ergibt sich :

$$(2.8) \quad f \in \mathcal{K}(G) \implies \text{supp } T_{H,q}(f) \subset \pi_H(\text{supp } f) \quad , \text{ für } f \in \mathcal{K}_+(G)$$

gilt sogar : $\text{supp } T_{H,q}(f) = \pi_H(\text{supp } f)$

(denn : $T_{H,q}(f)(xH) \neq 0 \implies \bigcup_{y \in H} f(xy) \neq 0 \implies xH \in \pi_H(\text{supp } f)$
 $(f \in \mathcal{K}(G), x \in G)$; $f \in \mathcal{K}_+(G)$, $f(x) \neq 0$ für $x \in G$, so folgt
 $T_{H,q}(f)(xH) > 0$ wegen der Positivität von μ_H .) .

Aufgrund von (2.7) wird sich zeigen , daß Linearformen auf $\mathcal{K}(G/H)$, die quasiinvariant bzgl. λ^q sind , mit LILF's auf $\mathcal{K}(G)$ zusammenhängen , die zusätzlich bezüglich der Rechtstranslationen mit Elementen aus H gewisse "Relativinvarianz"-Eigenschaften aufweisen:

(2.9) Definition

Sei $h: H \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein stetiger Homomorphismus. , $M \in \mathcal{K}(G)^*$.

M heißt H-relativ-rechtsinvariant bzgl. h , wenn gilt :

$$M(f^a) = h(a^{-1}) \Delta_H(a) M(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{K}(G), a \in H^{(1)} .$$

Für $B \subset G$ sei

$$LI_B(\mathcal{K}(G), H, h) := \left\{ M \in LI_B(\mathcal{K}(G)) \mid M \text{ H-relativ-rechtsinvariant bzgl. } h \right\}$$

1) Hat $M \in \mathcal{K}(G)^*$ die Invarianzeigenschaft

$$(*) \quad \bigvee_{f \in \mathcal{K}(G)} \bigvee_{a \in H} M(f^a) = M(f) ,$$

so heißt M in dieser Terminologie "H-relativ-rechtsinvariant bzgl. Δ_H " und nicht wie sonst oft üblich "rechtsinvariant bzgl. H "

Man erhält nun folgenden Zusammenhang :

(2.10) Satz

Sei $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi-H-Homomorphismus.

Dann gilt für $B \in G$:

Die Transponierte (alg.) $\left. \begin{matrix} T_{H,q}^t \\ \Phi_q^t \end{matrix} \right\}$ von $T_{H,q}$ aus (2.4) induziert einen Isomorphismus Φ_q^t von $QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))$ auf einen linearen Teilraum von $LI_B(\mathcal{K}(G), H, h_q)$ (λ^q, h_q wie in (1.4) bzw. (1.3)) .

Beweis: Wir setzen $\lambda := \lambda^q$, $h := h_q$.

Sei $M \in QI_B(\lambda, \mathcal{K}(G/H))$, $a \in B$, $f \in \mathcal{K}(G)$, $b \in H$.

$$\begin{aligned} T_{H,q}^t(M)(a^b f) &= M(T_{H,q}(a^b f)) = M(\lambda_{a^{-1}} a^b T_{H,q}(f)) = \\ &= M(T_{H,q}(f)) = \\ &\stackrel{(1.2)}{=} T_{H,q}^t(M)(f) , \end{aligned}$$

d.h. $T_{H,q}^t(M) \in LI_B(\mathcal{K}(G))$.

$$\begin{aligned} T_{H,q}^t(M)(f^b) &= M(T_{H,q}(f^b)) = h(b^{-1}) \Delta_H(b) M(T_{H,q}(f)) = \\ &\stackrel{(2.7)}{=} h(b^{-1}) \Delta_H(b) T_{H,q}^t(M)(f) , \end{aligned}$$

d.h. $T_{H,q}^t(M) \in LI_B(\mathcal{K}(G), H, h)$.

Da $T_{H,q}$ surjektiv ist , ist $T_{H,q}^t$ injektiv .

Im folgenden werden wir sehen , daß $\Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H)))$ nur von h_q abhängt :

(2.11) Lemma

Seien $q, q': G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ quasi-H-Homomorphismen mit $h_q = h_{q'}$,

(d.h. $q|_H = \alpha q'|_H$ für geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) .

Sei $B \in G$. Dann gilt:

$T_{q',q}: \mathcal{K}(G/H) \rightarrow \mathcal{K}(G/H)$, $T_{H,q}(f) \mapsto T_{H,q'}(f)$ ($f \in \mathcal{K}(G)$) ist ein wohldefinierter Automorphismus , dessen Transponierte $T_{q',q}^t$ einen Isomorphismus $\Phi_{q,q'}^t$ ¹⁾ von $QI_B(\lambda^{q'}, \mathcal{K}(G/H))$ auf $QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))$ induziert.

Man hat also : $T_{H,q'} = T_{q',q} \circ T_{H,q}$, $T_{H,q'}^t = T_{H,q}^t \circ T_{q',q}^t$ und

$$\begin{aligned} \Phi_{q'} &= \Phi_q \circ \Phi_{q,q'} \quad \text{mit } \Phi_q, \Phi_{q'} \text{ aus (2.10) ; insbesondere :} \\ \Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))) &= \Phi_{q'}(QI_B(\lambda^{q'}, \mathcal{K}(G/H))) . \end{aligned}$$

1) Korrekterweise müßten Φ_q und $\Phi_{q,q'}$ auch nach B indiziert werden; dies wird jedoch unterlassen, solange aus dem Zusammenhang klar ist, was gemeint ist.

Speziell ($H = \{e\}$): Sei $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ stetig (d.h. quasi- $\{e\}$ -Hom.), $B \in G$,
so gilt: $QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G)) \cong LI_B(\mathcal{H}(G)) (= QI_B(\lambda^1, \mathcal{H}(G)))$.

Beweis: $\lambda := \lambda^q$, $\lambda' := \lambda^{q'}$, $h := h_q = h_{q'}$.

$$\begin{aligned} \text{Für } f \in \mathcal{H}(G) \text{ gilt: } T_{H,q}(f)(xH) &= \int_H \frac{1}{q(xy)} f(xy) d\mu_H(y) \\ &= \frac{1}{q(x)} \int_H \frac{q(x)}{q(xy)} f(xy) d\mu_H(y) \\ &= \frac{1}{q(x)} \int_H \frac{1}{h(y)} f(xy) d\mu_H(y) \\ \text{analog: } T_{H,q'}(f)(xH) &= \frac{1}{q'(x)} \int_H \frac{1}{h(y)} f(xy) d\mu_H(y) \\ &\quad (\text{für } x \in G). \end{aligned}$$

Hieraus ersieht man, daß gilt:

$$\text{Kern } T_{H,q} = \text{Kern } T_{H,q'}.$$

$T_{q',q}$ ist daher wohldefiniert und injektiv.

Die Surjektivität von $T_{q',q}$ folgt unmittelbar aus der Definition und der Surjektivität der Abbildungen $T_{H,q}$ und $T_{H,q'}$.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} (*) \quad T_{q',q}(^a T_{H,q}(f)) &= ^a \left(\frac{\lambda_a}{\lambda'_a} T_{H,q'}(f) \right) \\ \text{für } f \in \mathcal{H}(G), a \in G, \\ \text{denn: } T_{q',q}(^a T_{H,q}(f)) &\stackrel{(2.6)}{=} T_{q',q}\left(\frac{1}{\lambda_a^{-1}} T_{H,q}(^a f)\right) = \\ &\stackrel{(1.5)}{=} T_{q',q}(^a (\lambda_a) T_{H,q}(^a f)) = T_{q',q}(T_{H,q}(^a ((\lambda_a \circ \pi_H) f))) = \\ &= T_{H,q'}(^a ((\lambda_a \circ \pi_H) f)) \stackrel{(2.6)}{=} \lambda'_a{}^{-1} {}^a T_{H,q'}((\lambda_a \circ \pi_H) f) = \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \lambda'_a{}^{-1} {}^a (\lambda_a) {}^a T_{H,q'}(f) \stackrel{(1.5)}{=} ^a \left(\frac{\lambda_a}{\lambda'_a} T_{H,q'}(f) \right). \end{aligned}$$

Da $T_{q',q}$ ein Automorphismus ist (mit der Inversen $T_{qq'}$),
ist auch $T_{q',q}^t$ bijektiv.

Sei $M \in QI_B(\lambda', \mathcal{H}(G/H))$, $f \in \mathcal{H}(G)$, $a \in B$.

$$\begin{aligned} T_{q',q}^t(M)(^a T_{H,q}(f)) &= M(T_{q',q}(^a T_{H,q}(f))) \stackrel{(*)}{=} M(^a \left(\frac{\lambda_a}{\lambda'_a} T_{H,q'}(f) \right)) = \\ &\stackrel{(1.2)}{=} M\left(\lambda'_a \left(\frac{\lambda_a}{\lambda'_a} T_{H,q'}(f) \right)\right) = \\ &= M(T_{H,q}((\lambda_a \circ \pi_H) f)) = \\ &= M(T_{q',q}(T_{H,q}((\lambda_a \circ \pi_H) f))) = T_{q',q}^t(M)(\lambda_a T_{H,q}(f)). \end{aligned}$$

d.h. $T_{q',q}^t(M) \in QI_B(\lambda, \mathcal{H}(G/H))$.

Analog : $T_{qq'}^t, (QI_B(\lambda, \mathcal{H}(G/H))) \subset QI_B(\lambda', \mathcal{H}(G/H))$.

$\Phi_{qq'} := T_{q,q'}^t |_{QI_B(\lambda', \mathcal{H}(G/H))}$ stellt deshalb einen Isomorphismus von $QI_B(\lambda', \mathcal{H}(G/H))$ auf $QI_B(\lambda, \mathcal{H}(G/H))$ dar.

(2.12) Bemerkung

Seien $q, q': G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ quasi-H-Homomorphismen.

Definiert man $q \sim_H q' : \iff h_q = h_{q'}$, so ist " $\sim_H$ " offenbar eine Äquivalenzrelation.

Es sei $B \subset G$, so daß gilt : $QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H)) \neq \{0\}$. Dann hat man:

$$q \sim_H q' \iff \Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H))) = \Phi_{q'}(QI_B(\lambda^{q'}, \mathcal{H}(G/H))) .$$

Insbesondere, da $QI_{\{e\}}(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H)) = \mathcal{H}(G/H)^* \neq \{0\}$ für alle quasi-H-Homomorphismen $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, folgt:

$$q \sim_H q' \iff \Phi_q(\mathcal{H}(G/H)^*) = \Phi_{q'}(\mathcal{H}(G/H)^*) .$$

Beweis:

zu " $\implies$ ":

Sei $M \in \Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H))) \setminus \{0\}$; $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $M(f) \neq 0$.

Wegen (2.10) und $\Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H))) = \Phi_{q'}(QI_B(\lambda^{q'}, \mathcal{H}(G/H)))$ folgt: $M \in LI_B(\mathcal{H}(G), H, h_q) \cap LI_B(\mathcal{H}(G), H, h_{q'})$.

Sei $a \in H$. Dann hat man :

$$M(f^a) = h_q(a^{-1}) \Delta_H(a) M(f) = h_{q'}(a^{-1}) \Delta_H(a) M(f) \quad , \text{d.h.}$$

$$h_q(a^{-1}) = h_{q'}(a^{-1}) \quad , \text{ insgesamt folgt: } h_q = h_{q'} .$$

" $\implies$ " folgt aus (2.11) .

Der folgende Satz stellt eine Charakterisierung von $\Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{H}(G/H)))$ in $LI_B(\mathcal{H}(G), H, h_q)$ ($B \subset G$, q quasi-H-Hom.) dar .

(2.13) Satz

Sei $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi-H-Homomorphismus, $B \subset G$.

Für $M \in LI_B(\mathcal{H}(G), H, h_q)$ (sogar für $M \in LI_B(\mathcal{H}(G))$) sind fol-

gende Aussagen äquivalent :

a) $M \in \Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H)))$

b) $\text{Kern } T_{H,q} \subset \text{Kern } M$

c) $M(\overline{T_{H,q}}(f) g) = M(f \overline{T_{H,q}}(g))$ für alle $f, g \in \mathcal{K}(G)$
(dabei sei für $f \in \mathcal{K}(G)$ $\overline{T_{H,q}}(f) := T_{H,q}(f) \circ \pi_H$ ($\in C(G)$))

d) $M(\sum_{i \in I} \overline{T_{H,q}}(g_i) f) = M(\sum_{i \in I} g_i \overline{T_{H,q}}(f))$ für alle $f \in \mathcal{K}(G)$
und alle $(g_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}(G)$ mit $(\pi_H(\text{supp } g_i))_{i \in I}$ lokalendlich .

Beweis: Wir setzen wieder $\lambda := \lambda^q$.

zu "a) $\Rightarrow$ b)": Sei $M \in \Phi_q(QI_B(\lambda, \mathcal{K}(G/H)))$. Dann folgt :

$M = M_0 \circ T_{H,q}$ für geeignetes $M_0 \in QI_B(\lambda, \mathcal{K}(G/H))$.

Deshalb : $\text{Kern } T_{H,q} \subset \text{Kern } M$.

zu "b) $\Rightarrow$ c)": Seien $f, g \in \mathcal{K}(G)$. M erfülle b) .

$\overline{T_{H,q}}(f) g - f \overline{T_{H,q}}(g) \in \text{Kern } T_{H,q}$, denn :

$T_{H,q}(\overline{T_{H,q}}(f) g - f \overline{T_{H,q}}(g)) = T_{H,q}(f) T_{H,q}(g) - T_{H,q}(f) T_{H,q}(g) = 0$.

Es folgt: $M(\overline{T_{H,q}}(f) g - f \overline{T_{H,q}}(g)) = 0$.

zu "c) $\Rightarrow$ d)": M erfülle c) . Sei $f \in \mathcal{K}(G)$, $(g_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}(G)$
mit $(\pi_H(\text{supp } g_i))_{i \in I}$ lokalendlich .

Es gilt : $A := \{i \in I \mid \pi_H(\text{supp } g_i) \cap \pi_H(\text{supp } f) \neq \emptyset\}$
ist endlich
(da $(\pi_H(\text{supp } g_i))_{i \in I}$ lokalendlich und $\pi_H(\text{supp } f)$
kompakt ist)

Weiter hat man :

1) $\overline{T_{H,q}}(g_i) f \neq 0 \Rightarrow i \in A$, denn:

$\overline{T_{H,q}}(g_i)(x)f(x) \neq 0$ für $x \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow xH \in \text{supp } T_{H,q}(g_i) \cap \pi_H(\text{supp } f)$

$\stackrel{(2.8)}{\subset} \pi_H(\text{supp } g_i) \cap \pi_H(\text{supp } f) \Rightarrow i \in A$.

Also gilt : $\sum_{i \in I} \overline{T_{H,q}}(g_i) f = \sum_{i \in A} \overline{T_{H,q}}(g_i) f$.

2) $g_i \overline{T_{H,q}}(f) \neq 0 \Rightarrow i \in A$, denn :

$g_i(x) \overline{T_{H,q}}(f)(x) \neq 0$ für $x \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow xH \in \pi_H(\text{supp } g_i) \cap \pi_H(\text{supp } f)$ (wegen (2.8)) $\Rightarrow i \in A$.

Also gilt: $\sum_{i \in I} g_i \overline{T_{H,q}}(f) = \sum_{i \in A} g_i \overline{T_{H,q}}(f)$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{i \in I} \overline{T_{H,q}}(g_i) f\right) &= M\left(\sum_{i \in A} \overline{T_{H,q}}(g_i) f\right) = \sum_{i \in A} M(\overline{T_{H,q}}(g_i) f) \\ &= \sum_{i \in A} M(g_i \overline{T_{H,q}}(f)) = M\left(\sum_{i \in A} g_i \overline{T_{H,q}}(f)\right) \\ &= M\left(\sum_{i \in I} g_i \overline{T_{H,q}}(f)\right). \end{aligned}$$

zu "d) $\Rightarrow$ b)": M erfülle d). Da G/H topologische Summe lokal-kompakter $\mathfrak{G}$ -kompakter Räume ist und daher parakompakt ist ^{*)}, gibt es in G/H eine Teilung der Einheit $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}_+(G/H)$: Sei $U \in \mathcal{U}_e(G)$ offen und relativkompakt. Da $(\pi_H(xU))_{x \in G}$ eine offene, relativkompakte Überdeckung von G/H ist, kann man eine Teilung der Einheit $(f_i)_{i \in I}$ von G/H finden, die sich $(\pi_H(xU))_{x \in G}$ unterordnet, d.h. $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}_+(G/H)$.

Wir wählen nun $(g_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}_+(G)$ so, daß gilt:

$$\bigvee_{i \in I} T_{H,q}(g_i) = f_i \quad (\text{siehe (2.5)})$$

Es folgt: $(\pi_H(\text{supp } g_i))_{i \in I}$ ist lokalendlich, denn nach (2.8) gilt:

$\pi_H(\text{supp } g_i) = \text{supp } f_i$ für alle $i \in I$,
 $(\text{supp } f_i)_{i \in I}$ ist aber lokalendlich nach Definition der Familie $(f_i)_{i \in I}$.

Sei nun $f \in \text{Kern } T_{H,q}$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} M(f) &= M\left(\sum_{i \in I} \overline{T_{H,q}}(g_i) f\right) \quad (\text{da } \sum_{i \in I} \overline{T_{H,q}}(g_i) = \sum_{i \in I} f_i \circ \pi_H = 1) \\ &= M\left(\sum_{i \in I} g_i \overline{T_{H,q}}(f)\right) = 0, \end{aligned}$$

d.h. $f \in \text{Kern } M$.

zu "b) $\Rightarrow$ a)": Wegen $\text{Kern } T_{H,q} \subset \text{Kern } M$ läßt sich M folgendermaßen faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(G) & \xrightarrow{M} & \mathbb{C} \\ T_{H,q} \downarrow & \nearrow M_0 & \\ \mathcal{K}(G/H) & & \end{array}$$

^{*)} vgl. Kowalsky [1], 36.9, Bourbaki [1], I, §9.10

Es gilt :

$M_0 \in \mathcal{QI}_B(\lambda, \mathcal{H}(G/H))$, denn :

Sei $f \in \mathcal{H}(G)$, $a \in B$, so gilt :

$$\begin{aligned} M_0({}^a T_{H,q}(f)) &= M_0\left(\frac{1}{\lambda_a^{-1}} T_{H,q}({}^a f)\right) \stackrel{(1.5)}{=} M_0(T_{H,q}({}^a((\lambda_a \circ \pi_H)f))) = \\ &= M({}^a((\lambda_a \circ \pi_H)f)) = M((\lambda_a \circ \pi_H)f) = M_0(T_{H,q}((\lambda_a \circ \pi_H)f)) = \\ &= M_0(\lambda_a T_{H,q}(f)) . \end{aligned}$$

Motiviert durch (2.13) c) führen wir für $M \in \mathcal{H}(G)^*$
($= \text{LI}_{\{e\}}(\mathcal{H}(G))$) folgende Bezeichnungen ein :

(2.14) Definition

a) Sei $M \in \mathcal{H}(G)^*$, $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi-H-Homomorphismus.

Für M gilt die linke Überwälzungsregel bzgl. H und q : $\iff$

M erfüllt c) von (2.13) für $B := \{e\}$ (bzw. $B := \emptyset$) .

b) Sei $M \in \mathcal{H}(G)^*$, $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi-H-Homomorphismus in G^* .

Für M gilt die rechte Überwälzungsregel bzgl. H und q : $\iff$

für M gilt die linke Überwälzungsregel in G^* bzgl. H und q .

(2.15) Bemerkungen

a) Sind q, q' zwei im Sinne von (2.12) äquivalente quasi-H-Homomorphismen, $M \in \mathcal{H}(G)^*$, so zeigen (2.13)a) $\iff$ c) und (2.11) :
Die linke Überwälzungsregel für M bzgl. H und q gilt genau dann wenn sie bzgl. H und q gilt .

b) Für den Spezialfall $H = G$, $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ stetiger Gruppenhomomorphismus hat man für $M \in \mathcal{H}(G)^*$:

1) Für M gilt die linke Überwälzungsregel bzgl. G und q $\iff$

$$\iff (+) M(f) \mu_G\left(\frac{g}{q}\right) = \mu_G\left(\frac{f}{q}\right) M(g) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{H}(G)$$

$$(\text{denn : } \overline{T_{H,q}}(f)(x) = \mu_G\left(\frac{f}{q}\right) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H}(G) , x \in G) .$$

Man überlegt sich leicht , daß für $q = 1$ die Eigenschaft (+) eine Charakterisierung des Haarintegrals darstellt , d.h. daß für $M \in \mathcal{H}(G)^*$ die folgende Äquivalenz gilt :

$$M(f) \mu_G(g) = \mu_G(f) M(g) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{H}(G) \iff$$

$$\iff M = \alpha \mu_G \quad (\text{für } \alpha \in \mathbb{C} \text{ geeignet}) .$$

2) Für M gilt die rechte Überwälzungsregel bzgl. G und $\Delta_G^{-1} \iff$

$$\iff M \text{ erfüllt (+) mit } q = 1 .$$

$$\begin{aligned} (\text{denn : } \overline{T_{H,q}}^{-1} \Delta_G^{-1}(f)(x) &= \int_G f(x \cdot y) \Delta_G(x \cdot y) d\mu_G(y) = \\ &= \int_G f(y) \Delta_G(y) d\mu_G(y) = \mu_G(f) \quad (f \in \mathcal{H}(G), x \in G)) . \end{aligned}$$

Für beliebiges abgeschlossenes H gibt es stets einen quasi- H -Homomorphismus $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, so daß μ_G die linke Überwälzungsregel bzgl. H und q erfüllt:

(2.16) Beispiel

Gemäß Reiter [1], Chap. 8, 1.6 gilt: Zu G gibt es einen quasi- H -Homomorphismus $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mit $h_q = (\Delta_G|_H)^{-1} \Delta_H$. Nach Reiter [1], Chap. 8, 1.2 und 2.1 gibt es ein (positives) lineares Funktional $\mu_{G/H}: \mathcal{K}(G/H) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mu_{G/H}(a f) = \mu_{G/H}(\lambda_a^q f)$ für alle $a \in G$ und $f \in \mathcal{K}(G/H)$, so daß gilt:

$$\mu_{G/H}(T_{H,q}(f)) = \mu_G(f) \text{ für alle } f \in \mathcal{K}(G), \text{ d.h.}$$

$$\mu_G = T_{H,q}^t(\mu_{G/H}) \in \mathfrak{D}_q(QI(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))). \text{ Wegen (2.13) erfüllt}$$

μ_G deshalb die linke Überwälzungsregel bzgl. H und q . (Man kann dies auch direkt unter Benutzung des Satzes von Fubini nachrechnen.)

Umgekehrt überlegt man sich leicht, daß gilt: Erfüllt μ_G die linke Überwälzungsregel bzgl. H mit irgendeinem quasi- H -Homomorphismus q , so folgt $h_q = (\Delta_G|_H)^{-1} \Delta_H$.

Die Gültigkeit der linken Überwälzungsregel für beliebige Elemente von $\mathcal{K}(G)^*$ stellt offenbar eine Verallgemeinerung dieses Manipulationsresultats für μ_G dar.

Für diskretes H hat man weiter:

(2.17) Lemma

Sei H diskret; $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi- H -Homomorphismus.

Für $M \in LI_{\text{el}}(\mathcal{K}(G), H, h_q)$ gilt dann:

M erfüllt die linke Überwälzungsregel bzgl. H und q .

Beweis: $h := h_q$

Seien $f, g \in \mathcal{K}(G)$.

Da H diskret ist, ist $A := (\text{supp } g)^{-1} \text{supp } f \cap H$ endlich.

Es gilt:

$$1) (f \frac{1}{q})^y g + 0 \text{ für } y \in H \implies y \in A,$$

$$\text{denn: } y \in H, x \in G \text{ mit } f(xy) \frac{1}{q(xy)} g(x) + 0 \implies$$

$$xy \in \text{supp } f, x \in \text{supp } g \implies y \in A.$$

$$2) (f \frac{1}{q} g)^y + 0 \text{ für } y \in H \implies y \in A,$$

$$\text{denn: } y \in H, x \in G \text{ mit } f(x) \frac{1}{q(xy^{-1})} g(xy^{-1}) + 0 \implies$$

$$xy^{-1} \in \text{supp } g, x \in \text{supp } f \implies y \in A.$$

Es folgt deshalb:

$$\begin{aligned}
 M(\overline{T_{H,q}}(f)g) &= M(\sum_{y \in H} (f \frac{1}{q}) y^{-1} g) = M(\sum_{y \in A} (f \frac{1}{q}) y^{-1} g) = \\
 &= \sum_{y \in A} M((f \frac{1}{q}) y^{-1} g) = \sum_{y \in A} h(y) \Delta_H(y^{-1}) M(f \frac{1}{q} g^y) = (\text{da } H \text{ diskret}) \\
 &= \sum_{y \in A} M(f (\frac{1}{q} g)^y) = M(\sum_{y \in A} f (\frac{1}{q} g)^y) = M(\sum_{y \in H} f (\frac{1}{q} g)^y) = \\
 &= M(f \overline{T_{H,q}}(g)).
 \end{aligned}$$

Für diskretes H haben wir deshalb:

(2.18) Satz

Sei H diskret, $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi- H -Homomorphismus, $B \subset G$.
Dann gilt:

$$\Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H))) = LI_B(\mathcal{K}(G), H, h_q), \text{ d.h.}$$

$$QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H)) \cong LI_B(\mathcal{K}(G), H, h_q).$$

Beweis:

Für $M \in LI_B(\mathcal{K}(G), H, h_q) \subset LI_{\text{eff}}(\mathcal{K}(G), H, h_q)$ gilt nach (2.17):

M erfüllt die linke Überwälzungsregel bzgl. H und q .

Aus (2.13) folgt nun $M \in \Phi_q(QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H)))$.

Der Rest der Behauptung folgt aus (2.10).

Speziell (für $q \sim 1$) ergibt sich:

(2.19) Folgerung

Sei H diskret, $B \subset G$.

Dann gilt:

$$LI_B(\mathcal{K}(G/H)) \cong LI_B(\mathcal{K}(G), H, 1).$$

Ist H diskreter Normalteiler von G , so erhalten wir zu-
nächst:

(2.20) Lemma

Sei H ein diskreter Normalteiler von G , $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein
quasi- H - und quasi- H^* -Homomorphismus.

Dann gilt:

$$T_{H^*,q} = T_{H,q}.$$

Insbesondere sind für $M \in \mathcal{K}(G)^*$ folgende Aussagen äquivalent:

a) M erfüllt die linke Überwälzungsregel bzgl. H und q .

b) M erfüllt die rechte Überwälzungsregel bzgl. H und q .

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{K}(G)$, $x \in G$.

$$\begin{aligned} \overline{T_{H,q}}(f)(x) &= \sum_{y \in H} \frac{1}{q(yx)} f(yx) = \sum_{y \in H} \frac{1}{q(xy)} f(xy) = \\ &= \overline{T_{H,q}}(f)(x) \quad . \end{aligned} \quad (\text{da } H \text{ Normalteiler ist})$$

Für den speziellen Fall $q \cong 1$ ergibt sich der folgende Satz, der die Aussage von Roelcke et al. [1], 5.Th. verallgemeinert:

(2.21) Satz

Sei H diskreter Normalteiler von G , $B \in G$.

Es gilt:

$$LI_B(\mathcal{K}(G), H, 1) = LI_{B \cup H}(\mathcal{K}(G)) = LI_{B \cup H}(\mathcal{K}(G), H, 1)$$

und daher:

$$LI_B(\mathcal{K}(G/H)) \cong LI_{B \cup H}(\mathcal{K}(G)) \quad .$$

Beweis:

Zunächst gilt wegen (2.18) und (2.20) :

$$LI_{\{e\}}(\mathcal{K}(G), H, 1) = LI_H(\mathcal{K}(G)) \quad , \text{denn:}$$

$$M \in LI_{\{e\}}(\mathcal{K}(G), H, 1) \iff M \in \Phi_1(LI_{\{e\}}(\mathcal{K}(G/H))) \iff$$

$$\iff M \text{ erfüllt die linke Überwälzungsregel bzgl. } H \text{ und } 1 \iff$$

$$\iff M \text{ erfüllt die rechte Überwälzungsregel bzgl. } H \text{ und } 1 \iff$$

$$M \in \Phi_1(LI_{\{e\}}(\mathcal{K}(G^*/H^*))) \iff M \in LI_{\{e\}}(\mathcal{K}(G^*), H^*, 1) = LI_H(\mathcal{K}(G))$$

Es folgt :

$$\begin{aligned} LI_B(\mathcal{K}(G), H, 1) &= LI_B(\mathcal{K}(G)) \cap LI_{\{e\}}(\mathcal{K}(G), H, 1) = \\ &= LI_B(\mathcal{K}(G)) \cap LI_H(\mathcal{K}(G)) = LI_{B \cup H}(\mathcal{K}(G)) \quad . \end{aligned}$$

Der Rest der Behauptung folgt nun aus (2.19) .

(2.22) Bemerkungen

a) In (2.21) kann auf die Voraussetzung , daß H Normalteiler und nicht nur Untergruppe von G ist , nicht verzichtet werden.

Dies kann man schon an dem Spezialfall $B = H$ mit endlichem G sehen , also an der Aussage : $LI_H(\mathcal{K}(G/H)) \cong LI_H(\mathcal{K}(G))$:

Sei $G := S(3)$, $H := \{id, (1,2)\}$ (Zyklenschreibweise für die Permutationen von $\{1,2,3\}$) .

Offenbar gilt : $\dim \mathcal{K}(G)^* = \dim \mathcal{K}(G) = 6$, $\dim LI_H(\mathcal{K}(G)) = 3$.

Andererseits hat man :

$G/H = \{ H, (1,3)H=(1,2,3)H, (2,3)H=(1,3,2)H \}$,
also $\dim \mathcal{H}(G/H)^* = \dim \mathcal{H}(G/H) = 3$; wegen $(1,2)H = H$,
 $(1,2)(1,3)H = (2,3)H$, $(1,2)(2,3)H = (1,3)H$ folgt insgesamt
 $\dim \text{LI}_H(\mathcal{H}(G/H)) = 2$.

b) Die Aussage von (2.21) bleibt gültig, falls G diskret,
 H beliebige Untergruppe und $B = G$ ist. Denn dann gilt:

$$\dim \text{LI}_G(\mathcal{H}(G)) = 1 = \dim \text{LI}_G(\mathcal{H}(G/H)) \quad (*)$$

Ob (*) jedoch auch für beliebiges G und diskrete bzw. endliche
Untergruppen H von G gilt, ist offen.

(2.23) Beispiel

Sei I eine Indexmenge, $I \neq \emptyset$, $G := \prod_{i \in I} H_i$, wobei $(H_i)_{i \in I}$
eine Familie von LK-Gruppen sei, so daß die H_i mit nur endlich
vielen Ausnahmen alle kompakt sind. Dann ist auch G eine LK-
Gruppe.

Wir setzen $\check{H}_i := \prod_{\substack{k \in I \\ k \neq i}} H_k$ für $i \in I$ und identifizieren $G/\check{H}_i$ mit H_i

für alle $i \in I$.

Dann gilt:

$$T_{\check{H}_i}^t(\text{LI}(\mathcal{H}(H_i))) \cap \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} T_{\check{H}_j}^t(\text{LI}(\mathcal{H}(H_j))) = \mathbb{C} \mu_G \quad \text{für alle } i \in I.$$

Man erhält daher:

$$\dim \text{LI}(\mathcal{H}(G)) = 1 + \sum_{i \in I} (\dim \text{LI}(\mathcal{H}(H_i)) - 1).$$

Beweis: Sei $i \in I$.

Sei $M \in T_{\check{H}_i}^t(\text{LI}(\mathcal{H}(H_i))) \cap \sum_{j \neq i} T_{\check{H}_j}^t(\text{LI}(\mathcal{H}(H_j)))$. Dann gilt:

$$M = M_i \circ T_{\check{H}_i} = \sum_{v=1}^n M_{j_v} \circ T_{\check{H}_{j_v}} \quad \text{für geeignete } M_i \in \text{LI}(\mathcal{H}(H_i)), \quad \left. M_{j_v} \in \text{LI}(\mathcal{H}(H_{j_v})) \quad (1 \leq v \leq n) \right\}^{(*)}$$

$$\text{Sei } J := \{j_1, \dots, j_n\}, \quad \check{H}_{i,J} := \prod_{\substack{k \in I \\ k \notin \{i\} \cup J}} H_k.$$

Für alle $v \in \{1, \dots, n\}$ wählen wir $g_v \in \mathcal{H}(H_{j_v})$ mit $\mu_{H_{j_v}}(g_v) = 1$
und es sei $g' \in \mathcal{H}(\check{H}_{i,J})$ mit $\mu_{\check{H}_{i,J}}(g') = 1$.

Für beliebiges $f \in \mathcal{K}(H_i)$ sei dann definiert :

$h_f: G \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h_f(y, y'_1, \dots, y'_n, z) := f(y) g_1(y'_1) \cdot \dots \cdot g_n(y'_n) g'(z)$$

für $y \in H_i$, $y'_v \in H_{j_v}$ für $v \in \{1, \dots, n\}$, $z \in \check{H}_{i,J}$.

Dann folgt für alle $f \in \mathcal{K}(H_i)$:

$h_f \in \mathcal{K}(G)$; wegen (*) gilt :

$$\begin{aligned} M(h_f) &= M_i(f) \mu_{H_{j_1}}(g_1) \cdot \dots \cdot \mu_{H_{j_n}}(g_n) \mu_{\check{H}_{i,J}}(g') = \\ &= \sum_{v=1}^n M_{j_v}(g_v) \mu_{H_{j_1}}(g_1) \cdot \dots \cdot \mu_{H_{j_{v-1}}}(g_{v-1}) \mu_{H_{j_{v+1}}}(g_{v+1}) \cdot \dots \cdot \mu_{H_{j_n}}(g_n) \mu_{H_i}(f) \mu_{\check{H}_{i,J}}(g'), \end{aligned}$$

d.h. $M_i(f) = \mu_{H_i}(f) \sum_{v=1}^n M_{j_v}(g_v)$ für alle $f \in \mathcal{K}(H_i)$.

Mit $\alpha := \sum_{v=1}^n M_{j_v}(g_v)$ folgt deshalb :

$$M = M_i \circ T_{\check{H}_i} = \alpha \mu_{H_i} \circ T_{\check{H}_i} = \alpha \mu_G.$$

Man wähle nun zu jedem $i \in I$ einen algebraischen Komplementärraum V_i von $\mathbb{C} \mu_G$ in $T_{\check{H}_i}^t(LI(\mathcal{K}(H_i)))$. Es ergibt sich:

$\dim V_i = \dim LI(\mathcal{K}(H_i)) - 1$ für alle $i \in I$.

Wegen $V_i \cap \sum_{j \in I, j \neq i} V_j = \{0\}$ für alle $i \in I$ folgt die Behauptung.

§3 Beziehungen zwischen LILF's auf $\mathcal{K}(H_1 \times H_2), \mathcal{K}(H_1), \mathcal{K}(H_2)$ und $\mathcal{K}(H_1 \times H_2)$

G sei wie bisher eine LK-Gruppe. In diesem Abschnitt wollen wir den Spezialfall betrachten, daß G semidirektes Produkt zweier LK-Gruppen H_1 und H_2 ist, d.h.

Es gibt einen Homomorphismus $\phi: H_2 \rightarrow \text{Aut}(H_1)$

($\text{Aut}(H_1)$:= Gruppe der stetigen Automorphismen von H_1) ,
derart, daß folgende Operation stetig ist:

$$(3.1) \quad H_2 \times H_1 \longrightarrow H_1, \quad (y, x) \longmapsto \phi_y(x) \quad (\phi_y := \phi(y) \quad (y \in H_2)),$$

$G = H_1 \times H_2$ (topologisch) mit folgenden Gruppenoperationen:

$$(3.2) \quad G \times G \longrightarrow G, \quad ((x, y), (x', y')) \longmapsto (x, y) \underset{G}{\circ} (x', y') \\ := (x \underset{H_1}{\circ} \phi_y(x'), yy')$$

$$\text{und} \quad G \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto ((x, y))_{\phi}^{-1} := (\phi_{y^{-1}}(x^{-1}), y^{-1})$$

Es gilt: H_1 ist mit einem abgeschlossenen Normalteiler, H_2 mit einer abgeschlossenen Untergruppe von G identifizierbar.

Ist $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi- H_1 -Homomorphismus, $B \in G$, so hat man zunächst:

$$(3.3) \quad QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H_1)) = QI_{\{e\} \times \text{pr}_2(B)}(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H_1)) \\ (\text{mit } \text{pr}_2: G \rightarrow H_2, \quad (x, y) \longmapsto y)$$

denn für $f \in \mathcal{K}(G/H_1)$ gilt:

$$(a, e)_{f((x, y) \underset{H_1}{\circ} 1)} = f((H_1 \underset{G}{\circ} (a^{-1}, e)) \underset{G}{\circ} (x, y)) = \\ = f((x, y) \underset{H_1}{\circ} 1) \quad \text{für alle } a, x \in H_1 \text{ und } y \in H_2,$$

d.h.: $(a, e)_f = f$ für alle $a \in H_1$;

für $M \in (\mathcal{K}(G/H_1))^*$ hat man deshalb:

$$M((a, b)_f) = M((a, e)((e, b)_f)) = M((e, b)_f) \quad \text{für } f \in \mathcal{K}(G/H_1), \\ a \in H_1, b \in H_2.$$

Definiert man nun $\bar{q}: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ durch $\bar{q}(y) := q(e, y)$, so ergibt sich:

1) hier ist die Linkstranslation bzgl. G gemeint

(3.4) $QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H_1))$ ist identifizierbar mit

$$QI_{pr_2(B)}(\lambda^q, \mathcal{K}(H_2)) = LI_{pr_2(B)}(\mathcal{K}(H_2)) \text{ nach (2.11), Ende}$$

(mit pr_2 wie in (3.3)), denn da H_1 Normalteiler von G ist, kann $\mathcal{K}(G/H_1)^*$ mit $\mathcal{K}(H_2)^*$ identifiziert werden und für $b \in pr_2(B)$ gilt:

$$\lambda_b^q(y) = \frac{\bar{q}(by)}{\bar{q}(y)} = \frac{q(e, by)}{q(e, y)} = \lambda_{(e, b)}^q((e, y) \cdot H_1)$$

für alle $y \in H_2$; d.h. $QI_{pr_2(B)}(\lambda^q, \mathcal{K}(H_2))$ und

$QI_{\{e\} \times pr_2(B)}(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H_1))$ können miteinander identifiziert werden.

Andererseits kann aber $LI_{pr_2(B)}(\mathcal{K}(H_2))$ auch mit $LI_B(\mathcal{K}(H_1 \times H_2/H_1))$ identifiziert werden (man setze $\phi := \phi_0$, mit $\phi_0: H_2 \rightarrow \text{Aut}(H_1)$, $y \mapsto \text{id}$, $q := 1$ und wende (3.4) an.) .

Mit (2.10) ergibt sich nun:

(3.5) Sei $B \subset G$, $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein quasi- H_1 -Homomorphismus.

Dann ist

$QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H_1))$ sowohl isomorph zu einem linearen Teilraum von $LI_{B \cup H_1}(\mathcal{K}(G), H_1, 1)$ als auch zu einem linearen Teilraum von $LI_{B \cup H_1}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2), H_1, 1)$ (man beachte: $pr_2(B \cup H_1) = pr_2(B) \cup \{e\}$) .

Ist H_1 diskret, so folgt aus (2.21) mit B, q wie in (3.5):

$$\begin{aligned} (3.6) \quad QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H_1)) &\cong LI_{B \cup H_1}(\mathcal{K}(G), H_1, 1) = LI_{B \cup H_1}(\mathcal{K}(G)) \\ &\cong LI_{B \cup H_1}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2), H_1, 1) = \\ &= LI_{B \cup H_1}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2)) \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich im Spezialfall $q = 1$, $B := G$:

(3.7) Satz

Sei H_1 diskret. Dann gilt:

$$\begin{aligned} LI(\mathcal{K}(G/H_1)) &= LI_{H_2}(\mathcal{K}(G/H_1)) \cong LI(\mathcal{K}(H_2)) \cong LI(\mathcal{K}(G)) \\ &\cong LI(\mathcal{K}(H_1 \times H_2)) \end{aligned}$$

Obwohl die Linkstranslation bzgl. G auf $\mathcal{K}(H_1 \times H_2)$ im

1) unter $H_1 \times H_2$ verstehe man stets die Produktgruppe mit der Produkttopologie.

Fall $6 * 6_0$ (siehe oben) von der Linkstranslation bzgl. der üblichen Gruppenoperationen auf $H_1 \times H_2$ verschieden ist, sind also nach (3.7) bei diskretem H_1 die entsprechenden LILF-Räume noch isomorph. Wir werden im Folgenden sehen, daß dies auch gilt, wenn H_2 diskret ist.

Wir wollen nun auch $QI_B(\lambda^q, \mathcal{K}(G/H_2))$ untersuchen, für $B \subset G$ und $q: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ quasi- H_2 -Homomorphismus. Zunächst erhalten wir:

$$(3.8) \quad \begin{array}{c} \equiv \\ h: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*, h \text{ stetiger} \\ \text{Gruppenhomomorphismus} \end{array} \quad h|_{H_2} = q, \quad H_1 \times \{e\} \subset \text{Kern } h.$$

Denn man kann definieren: $h(x, y) := h_q(e, y)$; da $pr_2: G \rightarrow H_2$, $(x, y) \mapsto y$, und h_q stetige Homomorphismen sind, ist dadurch ein stetiger Homomorphismus $h: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mit $h|_{H_2} = h_q$, d.h. $h|_{H_2} = q$ definiert.

Es genügt also, sich auf die Untersuchung der Räume $REL_B(\bar{h}, \mathcal{K}(G/H_2))$ zu beschränken, wobei $B \subset G$ und $\bar{h}: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, vom Typ $\bar{h} = h \circ pr_2$ mit $h: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ stetiger Gruppenhomomorphismus. Gilt $B \subset H_1$, so reicht es, den Raum $LI_B(\mathcal{K}(G/H_2))$ zu betrachten.

Aus (2.10) und (2.18) erhält man wieder:

(3.9) Sei $B \subset G$, $h: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, $\bar{h} := h \circ pr_2$. Dann ist $REL_B(\bar{h}, \mathcal{K}(G/H_2))$ isomorph zu einem linearen Teilraum von $LI_B(\mathcal{K}(G), H_2, h)$. Falls H_2 diskret ist, hat man:

$$REL_B(\bar{h}, \mathcal{K}(G/H_2)) \cong LI_B(\mathcal{K}(G), H_2, h).$$

Für $B := G$, $h := 1$ bedeutet dies:

$$LI(\mathcal{K}(G/H_2)) \cong LI(\mathcal{K}(G), H_2, 1) \quad (\text{siehe (2.19)}) .$$

Da G als topologischer Raum mit der Produktgruppe $H_1 \times H_2$

übereinstimmt und die Multiplikation von links mit Elementen aus H_1 und die Multiplikation von rechts mit Elementen aus H_2 auf beiden Gruppen dasselbe ist, gilt für $B \subset G$:

$$(3.10) \quad LI_B(\mathcal{K}(G), H_2, h) \subset LI_{B \cap H_1}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2), H_2, h) \\ (h: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ stetiger Gruppenhomomorphismus})$$

Man hat aber sogar:

$$(3.11) \quad REL_B(\bar{h}, \mathcal{K}(G/H_2)) \text{ ist isomorph zu einem linearen} \\ \text{Teilraum von } LI_{(B \cap H_1) \cup H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2), H_2, h) \\ (\text{für } h: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ stetiger Gruppenhomomorphismus, } \bar{h} := h \circ \text{pr}_2, \\ B \subset G).$$

Denn: Die Abbildung $T_{H_2, \bar{h}}$ ist die gleiche für die Gruppe G und die Gruppe $H_1 \times H_2$. Offenbar gilt: $T_{H_2, \bar{h}}^{(e, b)f} = \frac{1}{h(b)} T_{H_2, \bar{h}}(f)$ für alle $f \in \mathcal{K}(G)$ und $b \in H_2$, wobei $(e, b)^f$ bezüglich der Gruppenstruktur von $H_1 \times H_2$ zu bilden ist ($f \in \mathcal{K}(G)$, $b \in H_2$). Deshalb bildet $T_{H_2, \bar{h}}^t REL(\bar{h}, \mathcal{K}(G/H_2))$ in $LI_{H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2))$ ab.

Da jedoch i.a. die Multiplikationen von links mit Elementen von H_2 auf G und $H_1 \times H_2$ nicht übereinstimmen, ist nicht zu erwarten, daß etwa $LI(\mathcal{K}(G))$ und $LI(\mathcal{K}(H_1 \times H_2))$ gleich sind. Für diskretes H_2 kann man aber immerhin zeigen, daß gilt:

(3.12) Satz

Sei H_2 diskret, $B \subset H_1$. Dann:

$$LI_{\mathcal{S}(H_2)(B) \cup H_2}(\mathcal{K}(G)) = LI_{B \cup H_2}(\mathcal{K}(G)) \cong LI_{\mathcal{S}(H_2)(B) \cup H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2)),$$

insbesondere gilt für $B := H_1$:

$$LI(\mathcal{K}(G)) \cong LI(\mathcal{K}(H_1 \times H_2)).$$

$$(\mathcal{S}(H_2)(B)) := \{ \mathcal{S}_y(x) \mid y \in H_2, x \in B \}^{(1)}$$

Beweis: Sei $B \subset H_1$.

Das 1. Gleichheitszeichen folgt aus (1.6) und aus $[\mathcal{S}(H_2)(B) \cup H_2] = [B \cup H_2]$.

1) hier als Teilmenge von $H_1 \times H_2$ aufzufassen.

Die Abbildung $\tau: H_1 \times H_2 \longrightarrow G$, $(x,y) \mapsto (\sigma_y(x), y)$ ist topologisch

(denn τ ist offenbar bijektiv mit der Umkehrabbildung $G \longrightarrow H_1 \times H_2$, $(x,y) \mapsto (\sigma_y^{-1}(x), y)$; τ und τ^{-1} sind stetig). Es gilt:

$$1) \begin{aligned} \tau(x,y) &= (e,y) \circ (x,e) \quad \text{für alle } x \in H_1, y \in H_2 \\ \tau^{-1}(x,y) &= ((e,y) \circ (x,y)) \circ (e,y^{-1}) \quad \text{für } " , " \end{aligned}$$

Da τ topologisch ist, ist die Abbildung

$$\underline{\tau}: \mathcal{K}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(H_1 \times H_2), \quad f \mapsto \underline{\tau}(f) \quad \text{mit } \underline{\tau}(f)(x,y) := f(\tau(x,y)) \\ (\text{für } x \in H_1, y \in H_2)$$

wohldefiniert und ein (alg.) Isomorphismus.

$\underline{\tau}$ hat folgende Eigenschaften:

(Wir bezeichnen im folgenden mit $(a,b) \circ f$ bzw. $(a,b)_f$ die Linkstranslation, die sich auf G bzw. $H_1 \times H_2$ bezieht ($a \in H_1$, $b \in H_2$, $f \in \mathcal{K}(G) = \mathcal{K}(H_1 \times H_2)$.)

$$2) \text{ Sei } b \in H_2, f \in \mathcal{K}(G). \text{ Dann: } (e,b) \underline{\tau}(f) = \underline{\tau}((e,b) \circ f), \text{ denn} \\ (e,b) \underline{\tau}(f)(x,y) = \underline{\tau}(f)(x, b^{-1}y) = f((e, b^{-1}y) \circ (x,e)) = \\ = f((e, b^{-1}) \circ (e,y) \circ (x,e)) = (e,b) \circ f((e,y) \circ (x,e)) = \underline{\tau}((e,b) \circ f)(x,y) \\ ((x,y) \in H_1 \times H_2) \quad .$$

3) Sei $a \in H_1$, $f \in \mathcal{K}(G)$. Dann:

$$a) (a,e) \underline{\tau}(f) = \sum_{i=1}^n \underline{\tau}((\sigma_{y_i}(a), e) \circ f_i) \quad \text{mit } f_i \in \mathcal{K}(G), y_i \in H_2 \\ (1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^*) ;$$

$f_1, \dots, f_n$ und $y_1, \dots, y_n$ sind dabei folgendermaßen definiert: Da H_2 diskret ist, gilt $\text{pr}_2(\text{supp } f) = \{y_1, \dots, y_n\}$ für geeignete $y_1, \dots, y_n \in H_2$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen nun: (für $(x,y) \in G$)

$$f_i(x,y) := f(x,y) \chi_{\{y_i\}}(y) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dann folgt: $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{K}(G)$ und $\sum_{i=1}^n f_i = f$.

Für $a \in H_1$ hat man deshalb:

$$\begin{aligned} (a,e) \underline{\tau}(f)(x,y) &= \underline{\tau}(f)(a^{-1}x, y) = f(\sigma_y(a^{-1}x), y) = \sum_{i=1}^n f_i(\sigma_y(a^{-1}x), y) = \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(\sigma_{y_i}(a^{-1}x), y) = \sum_{i=1}^n f_i((\sigma_{y_i}(a^{-1}), e) \circ (\sigma_{y_i}(x), y)) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\sigma_{y_i}(a), e) \circ f_i(\sigma_{y_i}(x), y) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{y_i}(a), e) \circ f_i(\sigma_{y_i}(x), y) = \\ &= \sum_{i=1}^n \underline{\tau}((\sigma_{y_i}(a), e) \circ f_i)(x,y) \quad ((x,y) \in H_1 \times H_2) \quad . \end{aligned}$$

Umgekehrt hat man :

$$b) \underline{\tau}((a, e) \circ f) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{y_i}^{-1}(a), e) \underline{\tau}(f_i) \quad \text{mit } f_i, y_i \text{ wie in a)} \\ (1 \leq i \leq n)$$

denn:

$$\begin{aligned} \underline{\tau}((a, e) \circ f)(x, y) &= (a, e) \circ f(\sigma_y(x), y) = f(a^{-1} \sigma_y(x), y) = \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(a^{-1} \sigma_{y_i}(x), y) = \sum_{i=1}^n f_i(\sigma_{y_i}(\sigma_{y_i}^{-1}(a^{-1})x), y) = \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(\sigma_y(\sigma_{y_i}^{-1}(a^{-1})x), y) = \sum_{i=1}^n \underline{\tau}(f_i)(\sigma_{y_i}^{-1}(a^{-1})x, y) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\sigma_{y_i}^{-1}(a), e) \underline{\tau}(f_i)(x, y) \quad ((x, y) \in H_1 \times H_2) . \end{aligned}$$

Die Transponierte $\underline{\tau}^t : \mathcal{K}(H_1 \times H_2)^* \longrightarrow \mathcal{K}(G)^*$ induziert daher einen Isomorphismus von $LI_{\sigma(H_2)(B) \cup H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2))$ auf

$LI_{B \cup H_2}(\mathcal{K}(G))$:

Sei $M \in LI_{\sigma(H_2)(B) \cup H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2))$, $a \in B \cup \{e\}$, $b \in H_2$, $f \in \mathcal{K}(G)$.

$$\begin{aligned} \underline{\tau}^t(M)((a, e) \circ f) &= M(\underline{\tau}((a, e) \circ f)) = M\left(\sum_{i=1}^n (\sigma_{y_i}^{-1}(a), e) \underline{\tau}(f_i)\right) \quad (\text{nach 3)b}) \\ &= \sum_{i=1}^n M(\underline{\tau}(f_i)) \quad (\text{da } \sigma_{y_i}^{-1}(a) \in \sigma(H_2)(B)) \\ &= M\left(\underline{\tau}\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)\right) = M(\underline{\tau}(f)) = \underline{\tau}^t(M)(f) \end{aligned}$$

(dabei seien f_i, y_i ($1 \leq i \leq n$) wie in 3) zu f gewählt) .

$$\begin{aligned} \underline{\tau}^t(M)((e, b) \circ f) &= M(\underline{\tau}((e, b) \circ f)) = M((e, b) \underline{\tau}(f)) \quad (\text{nach 2}) \\ &= M(\underline{\tau}(f)) = \underline{\tau}^t(M)(f) . \end{aligned}$$

Daher ist $\underline{\tau}^t(M) \in LI_{B \cup H_2}(\mathcal{K}(G))$.

Sei umgekehrt $M \in LI_{B \cup H_2}(\mathcal{K}(G))$.

Wir definieren

$$M_0 : \mathcal{K}(H_1 \times H_2) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch : } M_0(\underline{\tau}(f)) := M(f) \quad (f \in \mathcal{K}(G))$$

Dann erhält man : $M_0 \in LI_{\sigma(H_2)(B) \cup H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2))$, denn für $a \in B, b \in H_2, f \in \mathcal{K}(G)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 M_0((\sigma_b(a), e) \underline{f}) &= M_0\left(\sum_{i=1}^n \underline{f}(\sigma_{y_i}(\sigma_b(a)), e) \delta_{f_i}\right) \text{ (nach 3) a) } \\
 &= \sum_{i=1}^n M_0(\underline{f}(\sigma_{y_i b}(a), e) \delta_{f_i}) = \sum_{i=1}^n M(\sigma_{y_i b}(a), e) \delta_{f_i} = \\
 &= \sum_{i=1}^n M(f_i) \quad \text{(denn } (\sigma_{y_i b}(a), e) = (e, y_i b) \delta(a, e) \in H_2 \delta B : \text{ siehe (1.6))} \\
 &= M\left(\sum_{i=1}^n f_i\right) = M(f) = M_0(\underline{f}) \quad (f_i, y_i \text{ (} 1 \leq i \leq n \text{) zu } f \text{ wie in 3)) .} \\
 M_0((e, b) \underline{f}) &= M_0(\underline{f}((e, b) \delta f)) = M((e, b) \delta f) = M(f) = M_0(\underline{f}) . \\
 &\quad 2)
 \end{aligned}$$

Nach Definition von M gilt offenbar: $\underline{f}^t(M_0) = M$.

Da $\underline{f}^t$ wegen der Surjektivität von $\underline{f}$ injektiv ist, ist damit alles gezeigt.

Obwohl im allgemeinen G/H_2 keine Gruppe ist, können H_1 und G/H_2 immerhin als homogene Räume bzgl. der Operationen $H_1 \times G/H_2 \rightarrow G/H_2$, $(x, (x', e)_{H_2}) \mapsto (xx', e)_{H_2}$ bzw. $H_1 \times H_1 \rightarrow H_1$, $(x, x') \mapsto xx'$ miteinander identifiziert werden. Es folgt:

(3.13) Sei $B \subset H_1$. Dann: $LI_B(\mathcal{K}(G/H_2))$ und $LI_B(\mathcal{K}(H_1))$ können miteinander identifiziert werden.

Weiter entspricht der Operation (3.1) von H_2 auf H_1 auf G/H_2 gerade die Operation $H_2 \times G/H_2$, $(y, (x, e)_{H_2}) \mapsto (\sigma_y(x), e)_{H_2}$. Dementsprechend identifiziert sich $REL_{H_2}(\bar{h}, \mathcal{K}(G/H_2))$ (für $h: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ stetiger Homomorphismus, $\bar{h} := h \circ \text{pr}_2$) mit dem Raum aller Linearformen auf $\mathcal{K}(H_1)$, die bzgl. der Automorphismen σ_y ($y \in H_2$) "relativinvariant" (bzgl. h) sind. Wir führen deshalb folgende Definition ein:

(3.14) Definition

Sei $h: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, $B \subset H_1$.
 $(H_2, h) - LI_B(\mathcal{K}(H_1)) := \left\{ M \in LI_B(\mathcal{K}(H_1)) \mid M(f \circ \sigma_y^{-1}) = h(y) M(f) \text{ für } \right.$
 $\left. \text{alle } y \in H_2; f \in \mathcal{K}(H_1) \right\}$

$H_2 - LI_B(\mathcal{K}(H_1)) := (H_2, 1) - LI_B(\mathcal{K}(H_1))$ bzw.

$H_2 - LI(\mathcal{K}(H_1)) := H_2 - LI_{H_1}(\mathcal{K}(H_1))$.

Mit dieser Definition gilt dann:

(3.15) Sei $B \subset H_1, h: H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann:

$\text{REL}_{B \cup H_2}(\bar{h}, \mathcal{K}(G/H_2))$ und $(H_2, h)\text{-LI}_B(\mathcal{K}(H_1))$ sind miteinander identifizierbar.

Speziell: $\text{LI}_{B \cup H_2}(\mathcal{K}(G/H_2)) = H_2\text{-LI}_B(\mathcal{K}(H_1))$ (unabhängig von der Topologie von H_2).

Ist H_2 diskret und setzt man $H_1' := H_2, H_2' := H_1, \sigma': H_2' \rightarrow \text{Aut}(H_1'), \sigma'(y) := \text{id}$, so erhält man aus (3.4) und (3.6):

$$\text{LI}_B(\mathcal{K}(H_1)) = \text{LI}_B(\mathcal{K}(H_2 \times H_1 / H_2)) \cong \text{LI}_{B \cup H_2}(\mathcal{K}(H_2 \times H_1)) \cong \text{LI}_{B \cup H_2}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2)) \quad (\text{für } B \subset H_1).$$

Hieraus und aus den Aussagen (3.13), (3.12), (3.9) und (3.15) ergibt sich im Spezialfall $B := H_1$ analog zu (3.7):

(3.16) Satz

Sei H_2 diskret. Dann gilt:

- a) $\text{LI}_{H_1}(\mathcal{K}(G/H_2)) \cong \text{LI}(\mathcal{K}(H_1)) \cong \text{LI}(\mathcal{K}(H_1 \times H_2)) \cong \text{LI}(\mathcal{K}(G)).$
- b) $\text{LI}(\mathcal{K}(G/H_2)) \cong H_2\text{-LI}(\mathcal{K}(H_1)) \cong \text{LI}(\mathcal{K}(G), H_2, 1).$

Im Gegensatz zu (3.7) hat man jedoch i.a. nicht:
 $\text{LI}_{H_1}(\mathcal{K}(G/H_2)) = \text{LI}(\mathcal{K}(G/H_2))$, falls H_2 diskret ist:

(3.17) Beispiel

Sei H_1 eine beliebige nicht-unimodulare LK-Gruppe. Sei $y \in H_1$ mit $\Delta_{H_1}(y) \neq 1$.

Sei H_2 die von y in H_1 erzeugte Untergruppe, versehen mit der diskreten Topologie.

$\sigma: H_2 \rightarrow \text{Aut}(H_1), y' \mapsto \sigma_{y'},$ mit $\sigma_{y'}(x) := y'xy'^{-1} \quad (x \in H_1)$ ist ein Homomorphismus, die Operation

$H_2 \times H_1 \rightarrow H_1, (y', x) \mapsto \sigma_{y'}(x)$ ist offenbar stetig.

Es folgt dann:

$\mu_{H_1} \in \text{LI}(\mathcal{K}(H_1)) \setminus H_2\text{-LI}(\mathcal{K}(H_1))$, denn:

Sei $f \in \mathcal{H}(H_1)$, $\mu_{H_1}(f) = 1$.

$$\mu_{H_1}(f \circ \sigma_y) = \mu_{H_1}((y^{-1}f)^y) = \Delta_{H_1}(y) \mu_{H_1}(f) + 1,$$

während $\mu_{H_1}(f) = 1$.

Insgesamt folgt: $LI_{H_1}(\mathcal{H}(G/H_2)) \not\subseteq LI(\mathcal{H}(G/H_2))$.

(3.18) Beispiel

$$\text{Sei } H_1 := \mathbb{R}^2, H_2 := SO(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1^2 + a_2^2 = 1 \right\}$$

(beide Gruppen mit den üblichen Topologien).

$$\text{Sei } \sigma: SO(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2), \quad \alpha \longmapsto \sigma_\alpha$$

mit $\sigma_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

σ ist ein Homomorphismus und die Operation (3.1) ist stetig.

Deshalb ist $\mathbb{R}^2$ isomorph zu dem homogenen Raum

$$\mathbb{R}^2 \times SO(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R}). \text{ Nach (3.16) gilt:}$$

$$LI(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)) \cong LI_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \times SO(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R}))).$$

Da bekanntlich $\mu_{\mathbb{R}^2}$, das Haarintegral (=Lebesgue-Integral) von $\mathbb{R}^2$, drehungsinvariant ist, gilt:

$$\mu_{\mathbb{R}^2} \in SO(2, \mathbb{R})\text{-}LI(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)).$$

Es ist jedoch nicht bekannt, ob etwa gilt:

$$LI(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)) = SO(2, \mathbb{R})\text{-}LI(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2))$$

oder wenigstens

$$LI(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)) = \bigcup_{\substack{H \triangleleft SO(2, \mathbb{R}), H = \overline{H}, H \neq \{e\} \\ h_H: H \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \text{ stetiger} \\ \text{Gruppenhomomorphismus}}} (H, h_H)\text{-}LI(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)),$$

d.h. jedes $M \in LI(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2))$ ist wenigstens bzgl. der Drehung um einen nichttrivialen Winkel "relativ" invariant.

§4 Gerade und ungerade LILF's auf $\mathcal{H}(G)$

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, $\tau: G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$.
Ist G unimodular, so gilt für $f \in \mathcal{H}(G)$:

$$(4.1) \quad \mu_G(f \circ \tau) = \mu_G(f) \quad .$$

Für beliebiges $M \in \text{LI}(\mathcal{H}(G))$ ist jedoch keineswegs gesagt, daß $M(f \circ \tau) = M(f)$.

Ist G nicht-unimodular, so kann man fragen, ob ein $M \in \text{LI}(\mathcal{H}(G))$, $M \neq 0$, existiert mit $M(f \circ \tau) = M(f)$ (bzw. $= -M(f)$) für alle $f \in \mathcal{H}(G)$; M wäre dann sicher kein Vielfaches von μ_G .

Zunächst die folgende Definition:

(4.2) Definition

Sei $M \in \text{LI}(\mathcal{H}(G))$.

a) M heißt gerade: $\iff M(f \circ \tau) = M(f)$ für alle $f \in \mathcal{H}(G)$.

$$\text{GLI}(\mathcal{H}(G)) := \{ M \in \text{LI}(\mathcal{H}(G)) \mid M \text{ gerade} \}$$

b) M heißt ungerade: $\iff M(f \circ \tau) = -M(f)$ für alle $f \in \mathcal{H}(G)$.

$$\text{ULI}(\mathcal{H}(G)) := \{ M \in \text{LI}(\mathcal{H}(G)) \mid M \text{ ungerade} \}$$

(4.3) Bemerkungen

a) $\text{GLI}(\mathcal{H}(G))$ und $\text{ULI}(\mathcal{H}(G))$ sind lineare Teilräume von $\text{BI}(\mathcal{H}(G)) := \text{LI}(\mathcal{H}(G), G, \Delta_G)$ (= Raum der linksinvarianten Linearformen auf $\mathcal{H}(G)$, die zusätzlich "rechtsinvariant" sind, d.h. insgesamt "biinvariant" sind; vgl. auch Fußnote zu (2.9)),
 $\text{GLI}(\mathcal{H}(G)) \cap \text{ULI}(\mathcal{H}(G)) = \{0\}$.

b) Ist G abelsch, so stimmt $\text{GLI}(\mathcal{H}(G))$ mit $\text{H-LI}(\mathcal{H}(G))$ überein, wobei $\text{H} := \{\text{id}_G, \tau\}$, während $\text{ULI}(\mathcal{H}(G))$ gleich $(\text{H}, h) - \text{LI}(\mathcal{H}(G))$ ist, mit H wie oben und $h: \text{H} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $h(\text{id}_G) := 1$ und $h(\tau) := -1$ (siehe (3.14)).

c) Sei $\Delta^g(\mathcal{H}(G)) := \text{span}(\{f \circ a \mid f \in \mathcal{H}(G), a \in G\}, \{f \circ \tau \mid f \in \mathcal{H}(G)\})$
 $\Delta^u(\mathcal{H}(G)) := \text{span}(\{f \circ a \mid f \in \mathcal{H}(G), a \in G\}, \{f \circ \tau \mid f \in \mathcal{H}(G)\})$

Dann gilt: $\text{GLI}(\mathcal{H}(G)) \cong (\mathcal{H}(G) / \Delta^g(\mathcal{H}(G)))^*$

$$\text{ULI}(\mathcal{H}(G)) \cong (\mathcal{H}(G) / \Delta^u(\mathcal{H}(G)))^*$$

Beweis:

a) Sei $M_a \in \text{GLI}(\mathcal{H}(G))$, $M_\tau \in \text{ULI}(\mathcal{H}(G))$, $a \in G$, $f \in \mathcal{H}(G)$.

$$\begin{aligned} M_1(f^a) &= M_1(f^a \circ \tau) = M_1(a^{-1}(f \circ \tau)) = M_1(f \circ \tau) = M_1(f) \\ M_2(f^a) &= -M_2(f^a \circ \tau) = -M_2(a^{-1}(f \circ \tau)) = -M_2(f \circ \tau) = M_2(f), \\ \text{d.h. } M_1, M_2 &\in \text{BI}(\mathcal{H}(G)). \end{aligned}$$

Offenbar sind $\text{GLI}(\mathcal{H}(G))$ und $\text{ULI}(\mathcal{H}(G))$ lineare Räume.

Sei $M \in \text{GLI}(\mathcal{H}(G)) \cap \text{ULI}(\mathcal{H}(G))$. Annahme: $M \neq 0$.

Dann gibt es ein $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $M(f) \neq 0$.

Es folgt: $M(f) = M(f \circ \tau)$, da M gerade

$$M(f) = -M(f \circ \tau), \text{ da } M \text{ ungerade, d.h.}$$

$$M(f) = -M(f) \text{ Widerspruch!}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{H-LI}(\mathcal{H}(G)) &= \{M \in \text{LI}(\mathcal{H}(G)) \mid M(f \circ \tau) = M(f)\} \\ &= \text{GLI}(\mathcal{H}(G)). \end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$M \in \text{GLI}(\mathcal{H}(G)) \iff M \Big| \Delta^g(\mathcal{H}(G)) = 0 \iff M \in (\Delta^g(\mathcal{H}(G)))^\perp \cong (\mathcal{H}(G)/\Delta^g(\mathcal{H}(G)))^*$$

$$M \in \text{ULI}(\mathcal{H}(G)) \iff M \Big| \Delta^u(\mathcal{H}(G)) = 0 \iff M \in (\Delta^u(\mathcal{H}(G)))^\perp \cong (\mathcal{H}(G)/\Delta^u(\mathcal{H}(G)))^*$$

Wir werden später sehen, daß i.a. (sogar im abelschen Fall: vgl. (4.6)) nicht gilt: $\text{BI}(\mathcal{H}(G)) = \text{GLI}(\mathcal{H}(G))$, daß also aus der "beidseitigen" Invarianz eines $M \in \mathcal{H}(G)^*$ ($M \neq 0$) nicht die Invarianz bzgl. τ folgen muß. Es gilt jedoch:

(4.4) Lemma

Sei G eine beliebige LK-Gruppe. Dann:

$$\text{BI}(\mathcal{H}(G)) = \text{GLI}(\mathcal{H}(G)) \oplus \text{ULI}(\mathcal{H}(G)).$$

Ist G abelsch, so hat man deshalb:

$$\text{LI}(\mathcal{H}(G)) = \text{GLI}(\mathcal{H}(G)) \oplus \text{ULI}(\mathcal{H}(G)).$$

Beweis:

Sei $M \in \text{BI}(\mathcal{H}(G))$.

Wir definieren: $M_1: \mathcal{H}(G) \rightarrow \mathbb{C}, M_1(f) := \frac{1}{2}(M(f) + M(f \circ \tau))$

Dann gilt: $M_1 \in \text{GLI}(\mathcal{H}(G))$.

Weiter ist $M_2: \mathcal{H}(G) \rightarrow \mathbb{C}, M_2(f) := \frac{1}{2}(M(f) - M(f \circ \tau))$

ein Element von $\text{ULI}(\mathcal{H}(G))$.

Offenbar: $M_1 + M_2 = M$.

(4.5) Definition

Sei G eine LK-Gruppe.

G heißt polythetisch : $\Longleftrightarrow$ es gibt ein $B \subset G, B$ endlich,
 $\overline{N(B)} = G$.

Für abelsches G bedeutet dies : $[B] = G$ für geeignetes endliches $B \subset G$ ¹⁾.

Der folgende Satz zeigt, daß für gewisse nicht-polythetische LK-Gruppen G gilt :

$\dim \text{BI}(\mathcal{K}(G)) = 2^{\mathfrak{L}} = \dim \text{GLI}(\mathcal{K}(G))$ (dabei sei $\mathfrak{L}$ die Kardinalität des Kontinuums), aber $\text{BI}(\mathcal{K}(G)) \neq \text{GLI}(\mathcal{K}(G))$; daß in diesen Fällen sogar $\dim \text{ULI}(\mathcal{K}(G)) = 2^{\mathfrak{L}}$ gilt, wurde von W. Roelcke bewiesen.

(4.6) Satz

Sei G eine kompakte, metrisierbare, nicht-polythetische Gruppe.

Dann gilt:

$$\dim \text{GLI}(\mathcal{K}(G)) = \dim \text{BI}(\mathcal{K}(G)) = \dim \text{LI}(\mathcal{K}(G)) = 2^{\mathfrak{L}} = \dim \mathcal{K}(G)^*$$

Falls für alle $X \subset G, X$ endlich, gilt: $\bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ \sigma \neq \emptyset}} \sigma \in A(\Sigma, X)$,

gilt zudem: $\dim \text{ULI}(\mathcal{K}(G)) = 2^{\mathfrak{L}}$.

(Σ bezeichne das duale Objekt von $G, A(\Sigma, X), (X \subset G)$ wie in (0.7).)

Beweis: Da G kompakt, metrisierbar und offenbar unendlich ist, ist Σ abzählbar unendlich (Hewitt/Ross [2], (28.11)).

Sei $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von Σ mit σ_0 wie in (0.7).

Für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen wir einen Repräsentanten $U^{(n)} \in \sigma_n$, H_n bezeichne den zu $U^{(n)}$ gehörigen (endlichdimensionalen) Hilbertraum mit Dimension d_n , $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{d_n}^{(n)}$ sei eine feste Orthonormalbasis von H_n .

Sei nun $s \in \mathbb{R}_+^*$, $s > 1$.

$$g_s = (g_s(\sigma_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}(\Sigma) = \prod_{n \in \mathbb{N}} B(H_n) \\ \text{(vgl. (0.8))}$$

werde folgendermaßen definiert: ($n \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq d_n$)

$$\langle g_s(\sigma_n), \xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)} \rangle := \begin{cases} d_n^{-2} n^{-s} & \text{falls } n \neq 0 \text{ und } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1) vgl. Takamatsu [1].

Es gilt nun : $g_s \in \mathcal{E}_1(\Sigma)$ (siehe (0.8)) für alle $s > 1$,
denn für $s > 1, n \in \mathbb{N}^*$ gilt :

$$\|g_s(\sigma_n)\|_{\varphi_1} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{d_n^2 n^s} = \frac{1}{d_n n^s} .$$

Deshalb gilt :

$$\|g_s\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d_n \|g(\sigma_n)\|_{\varphi_1} < \infty ,$$

d.h. $g_s \in \mathcal{E}_1(\Sigma)$.

Es folgt: $g_s = \mathcal{F}(f_s)$ für geeignetes $f_s \in \mathcal{H}(G)$ ($s > 1$)
(mit $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U} := (U^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, siehe (0.8)) ,
denn wegen Hewitt/Ross [2] , (32.10) und (34.7) gilt :
 $\mathcal{E}_1(\Sigma) \subset \mathcal{F}(\mathcal{H}(G))$.

Für f_s ($s > 1$) hat man $f_s \in \text{Kern } \mu_G$, denn :

$$\begin{aligned} \mu_G(f_s) &= \int_G f_s(x) d\mu_G(x) = \langle \mathcal{F}(f_s)(\sigma_0) \xi_1^{(0)}, \xi_1^{(0)} \rangle = \\ &= \langle g_s(\sigma_0) \xi_1^{(0)}, \xi_1^{(0)} \rangle = 0 \quad (s > 1) . \end{aligned}$$

Deshalb: $Y := \text{span} \{f_s \mid s > 1\} \subset \text{Kern } \mu_G$.

Wir zeigen nun : $(f_s)_{s > 1}$ ist linear unabhängig .

Sind nämlich $s_1, \dots, s_m > 1$ ($m \in \mathbb{N}^*$) paarweise verschieden,
 $\sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} f_{s_{\nu}} = 0$ für geeignete $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, so folgt:

$$0 = \mathcal{F}\left(\sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} f_{s_{\nu}}\right) = \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} g_{s_{\nu}} , \text{ d.h.}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} \langle g_{s_{\nu}}(\sigma_n) \xi_i^{(n)}, \xi_i^{(n)} \rangle = \\ &= \frac{1}{d_n^2} \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} \frac{1}{n^{s_{\nu}}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \implies \end{aligned}$$

$$\implies 0 = \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} \frac{1}{n^{s_{\nu}}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* .$$

Gäbe es ein $\nu \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_{\nu} \neq 0$, so könnte man $\nu_0 \in \{1, \dots, m\}$ so wählen, daß gilt:

$$\lambda_{\nu_0} \neq 0 \text{ und } s_{\nu_0} = \min \{s_{\nu} \mid \nu \in \{1, \dots, m\}, \lambda_{\nu} \neq 0\} .$$

Es folgte dann :

$$0 \neq -\lambda_{\nu_0} = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \nu_0}}^m \lambda_{\nu} \frac{n^{s_{\nu_0}}}{n^{s_{\nu}}} = \sum_{\nu \neq \nu_0}^m \lambda_{\nu} n^{-(s_{\nu} - s_{\nu_0})} .$$

Da jedoch letzterer Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, ist dies ein Widerspruch!

Damit folgt: $\lambda_1, \dots, \lambda_m = 0$.

Insgesamt ergibt sich also: $(f_s)_{s \geq 1}$ ist linear unabhängig.

Es läßt sich sogar zeigen, daß

$$(+)\quad Y \cap \Delta^g(\mathcal{H}(G)) = \{0\}$$

gültig ist.

Um dies zu beweisen, benötigen wir folgende Eigenschaft von Elementen $f \in Y \setminus \{0\}$:

$$(*)\quad f \in Y \setminus \{0\} \Rightarrow \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\sigma_n) + \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\sigma_n}) = 0$$

nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}^*$.

Beweis von (*):

Sei $f \in Y \setminus \{0\}$.

$$N := \{n \in \mathbb{N}^* \mid \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\sigma_n) + \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\sigma_n}) = 0\}.$$

Annahme: N ist unendlich.

Für jedes $n \in N$ gilt: $\overline{\sigma_n} = \sigma_{r(n)}$ für genau ein $r(n) \in N$;

$r: N \rightarrow N$, $n \mapsto r(n)$ ist bijektiv.

Aus $f \in Y \setminus \{0\}$ folgt: $f = \sum_{v=1}^m \lambda_v f_{s_v}$ mit geeigneten

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 1 < s_1 < s_2 \dots < s_m,$$

$$s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}_+^*.$$

Für $n \in N$ folgt hieraus:

$$0 = \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\sigma_n) + \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\sigma_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^d \langle \mathcal{F}(f)(\sigma_n) \xi_i^{(n)}, \xi_i^{(n)} \rangle + \langle \mathcal{F}(f)(\sigma_{r(n)}) \xi_i^{(r(n))}, \xi_i^{(r(n))} \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^d \sum_{v=1}^m \lambda_v \left[\langle \mathcal{F}(f_{s_v})(\sigma_n) \xi_i^{(n)}, \xi_i^{(n)} \rangle + \langle \mathcal{F}(f_{s_v})(\sigma_{r(n)}) \xi_i^{(r(n))}, \xi_i^{(r(n))} \rangle \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^d \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{1}{d_n^2} \left(\frac{1}{n^{s_v}} + \frac{1}{r(n)^{s_v}} \right) =$$

$$= \frac{1}{d_n} \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{r(n)^{s_v} + n^{s_v}}{(n r(n))^{s_v}}, \text{ d.h. } 0 = \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{r(n)^{s_v} + n^{s_v}}{(n r(n))^{s_v}}.$$

Man erhält:

$$0 \neq -\lambda_1 = \sum_{v=2}^m \lambda_v \frac{r(n)^{s_v} + n^{s_v}}{(n \cdot r(n))^{s_v - s_1} (r(n)^{s_1 + n^{s_1}})} .$$

Sei $r_1(n) := \max\{n, r(n)\}$, $r_2(n) := \min\{n, r(n)\}$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 \neq |\lambda_1| &\leq \sum_{v=2}^m |\lambda_v| \frac{2(r_1(n))^{s_v}}{r_1(n)^{s_v - s_1} \cdot r_2(n)^{s_v - s_1} r_1(n)^{s_1}} = \\ &= 2 \sum_{v=2}^m |\lambda_v| \frac{1}{r_2(n)^{s_v - s_1}} \quad (**). \end{aligned}$$

Es gilt nun: $r_2(N) := \{r_2(n) \mid n \in N\}$ ist unendlich, denn sonst hätte man mit $n_0 := \max(r_2(N))$:

$n \in N \implies n \leq n_0$ oder $r(n) \leq n_0$; da aber angenommen wurde, daß N unendlich ist, folgt $N_1 := N \cap \{n \in N \mid n > n_0\}$ ist unendlich. Für $n \in N_1$ gilt aber: $r(n) \leq n_0$, d.h. $r(N_1)$ ist endlich, was ein Widerspruch zur Bijektivität von r ist.

$r_2(N)$ ist also unendlich.

Das ist jedoch ein Widerspruch zu (**).

Damit ist (*) bewiesen.

Nun zum Beweis von (+):

Annahme: $\exists f \in Y \cap \Delta^g(\mathcal{K}(G)) \quad f \neq 0$.

Wegen $f \in \Delta^g(\mathcal{K}(G))$ folgt:

$$f = \sum_{k=1}^r (h_k - \bar{a}_k h_k) + h_{r+1} - h_{r+1} \circ \tau \quad \text{für geeignete } h_1, \dots, h_{r+1} \in \mathcal{K}(G), \quad a_1, \dots, a_r \in G.$$

Für $n \in \mathbb{N}^*$ ergibt sich: (vgl. (0.9))

$$\text{Spur } \mathcal{F}(f)(\mathcal{O}_n) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^r (\text{Spur } \mathcal{F}(h_k)(\mathcal{O}_n) - \text{Spur } \bar{U}_{a_k}^{(n)} \mathcal{F}(h_k)(\mathcal{O}_n)) + \\ &+ \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\mathcal{O}_n) - \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\overline{\mathcal{O}_n}) \quad (++) . \end{aligned}$$

Wegen (*) gilt:

Es gibt ein $m \in \mathbb{N}^*$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq m$, gilt:

$$\text{Spur } \mathcal{F}(f)(\mathcal{O}_n) \neq \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\mathcal{O}_n}).$$

Für jedes $n \in \{1, \dots, m-1\}$ hat man:

Es gibt ein $b_n \in G$ mit $U_{b_n}^{(n)} \neq \text{id}$ (denn sonst wäre $U_x^{(n)} = \text{id}$

für alle $x \in G \implies U^{(n)}$ reduzibel (da $U^{(n)} \notin \mathcal{O}_0$) .

Sei $H := \overline{N(\{b_1, \dots, b_{m-1}, a_1, \dots, a_r\})}$.

Da G nicht-polythetisch ist, gilt : $G/H \neq \{e\}$.

Aus Hewitt/Ross [1] , (22.12) und Hewitt/Ross [2] , (28.10) folgt : Es gibt eine stetige irreduzible unitäre Darstellung W von G mit folgenden Eigenschaften:

$W_c = \text{id}$ für alle $c \in H$, $\bigcup_{x \in G} W_x \neq \text{id}$, insbesondere:

$W \notin \mathcal{O}_0$.

Sei $\mathcal{O}_{n_0}$ ($n_0 \in \mathbb{N}^*$ geeignet) die Äquivalenzklasse von W .

Dann gilt für $U^{(n_0)}$:

$U_c^{(n_0)} = \text{id}$ für alle $c \in H$, d.h. $n_0 \geq m$ (siehe oben).

Man erhält jedoch aus (++) :

$\text{Spur } \mathcal{F}(f)(\mathcal{O}_{n_0}) = \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\mathcal{O}_{n_0}) - \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\overline{\mathcal{O}_{n_0}})$,
und

$\text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\mathcal{O}_{n_0}}) = \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\mathcal{O}_{r(n_0)})$ ($r(n_0) \in \mathbb{N}^*$ geeignet)

$$= \sum_{k=1}^r (\text{Spur } \mathcal{F}(h_k)(\mathcal{O}_{r(n_0)}) - \text{Spur } \overline{U_{a_k}^{(r(n_0))}} \mathcal{F}(h_k)(\mathcal{O}_{r(n_0)})) + \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\mathcal{O}_{r(n_0)}) - \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\overline{\mathcal{O}_{r(n_0)}}) =$$

$$= \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\overline{\mathcal{O}_{n_0}}) - \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\mathcal{O}_{n_0})$$

(denn $\overline{U^{(r(n_0))}}$ ist äquivalent zu $U^{(n_0)}$) ;

$$\text{d.h. } \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\mathcal{O}_{n_0}) = -\text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\mathcal{O}_{n_0}}) .$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von m .

Damit ist (+) bewiesen.

Es folgt : $\text{codim } \Delta^g(\mathcal{K}(G)) \geq \mathbb{L}$, d.h. $\dim \text{GLI}(\mathcal{K}(G)) \geq 2^{\mathbb{L}-1}$.

Andererseits gilt: $\dim \text{GLI}(\mathcal{K}(G)) \leq \dim \mathcal{K}(G)^* \leq 2^{\mathbb{L}}$, denn:

Da die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ einen Isomorphismus von $\mathcal{K}(G)$ auf einen linearen Teilraum von $\mathcal{E}(\Sigma)$ darstellt, hat man:

$$\dim \mathcal{K}(G) = \dim \mathcal{F}(\mathcal{K}(G)) \leq \dim \mathcal{E}(\Sigma) .$$

Wir zeigen nun: $\dim \mathcal{E}(\Sigma) \leq \mathbb{L}$.

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \prod_{n \in \mathbb{N}} B(H_n) \cong \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B(H_n) \right)^* .$$

1) siehe Köthe [1] , §9.5 (5) .

Es gilt : $\dim \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B(H_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n^2$ (da $\dim B(H_n) = d_n$)
(Bourbaki [3], II, §7.2, Prop. 2).

Deshalb: $\dim \prod_{n \in \mathbb{N}} B(H_n) = 2^{\sum_{n \in \mathbb{N}} d_n^2} = 2^{\aleph_0} = \mathcal{L}$.

Nun folgt also auch : $\dim \mathcal{K}(G)^* \leq 2^{\mathcal{L}}$ und damit insgesamt:
 $\dim \text{GLI}(\mathcal{K}(G)) = \dim \text{LI}(\mathcal{K}(G)) = 2^{\mathcal{L}}$.

Nun zum 2. Teil der Behauptung von (4.6) :

Es gelte für alle $X \subset G, X$ endlich : $A(\Sigma, X)$ enthält ein
 $\mathfrak{o} * \overline{\mathfrak{o}}$.

Dann kann man (analog zu (+)) zeigen, daß gilt :

$$(+') \quad Y \cap \Delta^u(\mathcal{K}(G)) = \{0\}.$$

Um (+') zu beweisen, benötigen wir eine (*) entsprechende Aussage :

$$(*) \quad f \in Y \setminus \{0\} \Rightarrow \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\mathfrak{o}_n) - \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\mathfrak{o}_n}) = 0 \\ \text{nur für endlich viele } n \in \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{o}_n * \overline{\mathfrak{o}_n}\}.$$

Beweis von (*') :

Sei $f \in Y \setminus \{0\}$.

Sei $N := \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathfrak{o}_n * \overline{\mathfrak{o}_n}, \text{ Spur } \mathcal{F}(f)(\mathfrak{o}_n) - \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\mathfrak{o}_n}) = 0\}$

Annahme : N ist unendlich.

Wie im Beweis von (*) gibt es eine bijektive Abbildung $r: N \rightarrow N$,
so daß gilt : $\overline{\mathfrak{o}_n} = \mathfrak{o}_{r(n)}$ (mit $r(n) \neq n$) für alle $n \in N$.

Wegen $f \in Y \setminus \{0\}$ gilt :

$$f = \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} f_{s_{\nu}} \quad \text{mit geeigneten } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

$$1 < s_1 < \dots < s_m, \quad s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}_+^*.$$

Für $n \in N$ folgt :

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\mathfrak{o}_n) - \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\mathfrak{o}_n}) = \\ &= \sum_{i=1}^{d_n} (\langle \mathcal{F}(f)(\mathfrak{o}_n) \xi_i^{(n)}, \xi_i^{(n)} \rangle - \langle \mathcal{F}(f)(\mathfrak{o}_{r(n)}) \xi_i^{r(n)}, \xi_i^{r(n)} \rangle) = \\ &= \sum_{i=1}^{d_n} \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} (\langle \mathcal{F}(f_{s_{\nu}})(\mathfrak{o}_n) \xi_i^{(n)}, \xi_i^{(n)} \rangle - \langle \mathcal{F}(f_{s_{\nu}})(\mathfrak{o}_{r(n)}) \xi_i^{r(n)}, \xi_i^{r(n)} \rangle) = \\ &= \frac{1}{d_n^2} \sum_{i=1}^{d_n} \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} \left(\frac{1}{s_{\nu}} - \frac{1}{s_{\nu}(r(n))} \right) = \frac{1}{d_n^2} \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} \left(\frac{1}{s_{\nu}} - \frac{1}{s_{\nu}(r(n))} \right). \end{aligned}$$

Nach dem erweiterten Mittelwertsatz gibt es für alle $v \in \{1, \dots, m\}$ ein $t_v(n) \in \mathbb{R}$ zwischen n und $r(n)$, so daß gilt :

$$\frac{1}{n^{s_v}} - \frac{1}{r(n)^{s_v}} = \frac{s_v}{t_v(n)^{s_v+1}}$$

$$\frac{1}{n^{s_1}} - \frac{1}{r(n)^{s_1}} = \frac{s_1}{t_v(n)^{s_1+1}}$$

Es folgt (für $v \in \{1, \dots, m\}$) :

$$\frac{1}{n^{s_v}} - \frac{1}{r(n)^{s_v}} = \frac{s_v}{s_1} t_v(n)^{-s_v+s_1} \left(\frac{1}{n^{s_1}} - \frac{1}{r(n)^{s_1}} \right).$$

Wegen $\frac{1}{n^{s_1}} - \frac{1}{r(n)^{s_1}} \neq 0$ erhält man daher :

$$0 = \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{s_v}{s_1} t_v(n)^{s_1-s_v}$$

und hieraus :

$$-\lambda_1 = \sum_{v=2}^m \lambda_v \frac{s_v}{s_1} t_v(n)^{s_1-s_v}, \text{ also}$$

$$(o) \quad 0 \neq |\lambda_1| \leq \sum_{v=2}^m |\lambda_v| \frac{s_v}{s_1} t_v(n)^{s_1-s_v}.$$

Sei $v \in \{2, \dots, m\}$.

$$N_v := \{ t_v(n) | n \in \mathbb{N} \}.$$

N_v ist unendlich, denn sonst existierte $k_v := \max N_v$ und es folgte, da für alle $n \in \mathbb{N}$ $t_v(n)$ zwischen n und $r(n)$ liegt : $n \leq k_v$ oder $r(n) \leq k_v$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $M_v := \mathbb{N} \cap \{ n \in \mathbb{N} | n > k_v \}$ ergäbe sich :

$$r(M_v) \subset \{1, \dots, k_v\}.$$

Da $\mathbb{N}$ unendlich ist, ist jedoch M_v unendlich ; wegen der Bijektivität von r müßte also auch $r(M_v)$ unendlich sein. Widerspruch! Die Unendlichkeit von N_v für alle $2 \leq v \leq m$ steht jedoch im Widerspruch zu (o) .

Also ist $\mathbb{N}$ endlich.

Beweis von (+') :

$$\text{Annahme : } \exists f \in Y \cap \Delta^u(\mathcal{H}(G)) \quad f \neq 0.$$

Wegen $f \in \Delta^u(\mathcal{H}(G))$ folgt :

$$f = \sum_{k=1}^r (h_k - a_k h_k) + h_{r+1} + h_{r+1} \circ \tau \quad \text{für geeignete } h_1, \dots, h_{r+1} \in \mathcal{H}(G), a_1, \dots, a_r \in G.$$

Für $n \in \mathbb{N}^*$ ergibt sich nun :

$$\begin{aligned} \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\epsilon_n) &= \sum_{k=1}^r (\text{Spur } \mathcal{F}(h_k)(\epsilon_n) - \text{Spur } \overline{U}_{a_k}^{(n)} \mathcal{F}(h_k)(\epsilon_n)) + \\ &+ \text{Spur } \mathcal{F}(h_{r+1})(\epsilon_n) + \text{Spur } \overline{\mathcal{F}}(h_{r+1})(\overline{\epsilon_n}). \quad (++) \end{aligned}$$

Wegen (*) gilt :

Es gibt ein $m \in \mathbb{N}^*$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq m$, gilt :

$$\epsilon_n + \overline{\epsilon_n} \implies \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\epsilon_n) + \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\epsilon_n}).$$

Wie im Beweis von (+) wählen wir wieder zu jedem $n \in \{1, \dots, m-1\}$ ein $b_n \in G$ mit $U_{b_n}^{(n)} = \text{id}$.

Nach Voraussetzung gibt es ein $\epsilon \in \Sigma$, $\epsilon \neq \overline{\epsilon}$, mit

$$\epsilon \in A(\Sigma, \{b_1, \dots, b_{m-1}, a_1, \dots, a_r\}).$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}^*$ mit $\epsilon = \epsilon_{n_0}$.

Dann gilt : $n_0 \geq m$, denn $\epsilon \neq \overline{\epsilon}$ und $U_{b_n}^{(n_0)} = \text{id}$ für alle $n \in \{1, \dots, m-1\}$.

Analog zum Beweis von (+) erhält man durch Einsetzen von ϵ_{n_0} bzw. $\overline{\epsilon_{n_0}}$ in (++) :

$$\text{Spur } \mathcal{F}(f)(\epsilon_{n_0}) = \text{Spur } \mathcal{F}(f)(\overline{\epsilon_{n_0}}), \text{ was einen Widerspruch zur}$$

Definition von m darstellt.

(+) ist damit bewiesen.

Es folgt : $\text{codim } \Delta^u(\mathcal{H}(G)) \geq \mathcal{L}$, d.h. $\dim \text{ULI}(\mathcal{H}(G)) \geq 2^{\mathcal{L}}$.

Wegen $\dim \mathcal{H}(G)^* \leq 2^{\mathcal{L}}$ (siehe Beweis des 1. Teils der Behauptung von (4.6)) ergibt sich insgesamt :

$$\dim \text{ULI}(\mathcal{H}(G)) = 2^{\mathcal{L}}.$$

Insbesondere gilt im abelschen Fall :

(4.7) Korollar

Sei G eine abelsche kompakte, metrisierbare, nicht-polythetische Gruppe. Dann gilt :

$$\dim \text{GLI}(\mathcal{H}(G)) = \dim \text{LI}(\mathcal{H}(G)) = 2^{\mathcal{L}}.$$

Gilt weiter für jede endlich erzeugte Untergruppe H von G :

H^1 besitzt ein Element ξ mit $\text{ord}(\xi) > 2$, so hat man außerdem : $\dim \text{ULI}(\mathcal{H}(G)) = 2^{\mathcal{L}}$.

Beweis :

Der 1. Teil der Behauptung folgt sofort aus (4.6) .

Für eine endliche Teilmenge X von G und $\xi \in \hat{G}$ gilt :

$$A(\Sigma, X) = [X]^{\perp}, \quad \bar{F} = \xi^{-1}.$$

Daher folgt auch der 2. Teil der Behauptung aus (4.6) .

(4.8) Beispiel

Die an die endlich erzeugten Untergruppen von G gestellte Bedingung ist offenbar insbesondere dann erfüllt, wenn für alle Elemente $\xi \in \hat{G}$, $\xi \neq 1$, gilt : $\text{ord}(\xi) > 2$.

Sei $G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^N$ (p sei eine beliebige Primzahl) .

Dann ist G kompakt, metrisierbar und nicht-polythetisch .

Weiter erfüllt G obige Bedingung, da offenbar jedes Element ξ von $\hat{G} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{(N)}$ (= direkte Summe), $\xi \neq 1$, die Ordnung p hat .

Es gilt daher : $\dim \text{GLI}(\mathcal{H}(G)) = 2^L$ und

$$\dim \text{ULI}(\mathcal{H}(G)) = 2^L.$$

(4.9) Bemerkungen

a) Der Beweis von (4.6) stellt eine Verallgemeinerung des Beweises von 1.Prop. aus Roelcke et al. [1] dar.

b) Aus dem Beweis von (4.6) erkennt man, daß außerdem gilt: (mit $A_1(G) := \{f \in \mathcal{H}(G) \mid \mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}_1(\Sigma)\}$, $\mathcal{F}$ wie im Beweis von (4.6) und $\Delta(A_1(G)) := \text{span}\{f - af \mid f \in A_1(G), a \in G\}$)

$\text{codim}_{A_1(G)} \Delta(A_1(G)) = L$, also $\dim \text{LI}(A_1(G)) = 2^L$ mit

$$\text{LI}(A_1(G)) := \{M \in A_1(G)^* \mid M(af) = M(f) \text{ für alle } f \in A_1(G), a \in G\}.$$

(Denn die im Beweis von (4.6) konstruierte Familie $(f_s)_{s>1}$ liegt in $A_1(G)$, die f_s ($s > 1$) sind linear unabhängig und wegen (+) im Beweis von (4.6) gilt $\text{span}(\{f_s \mid s > 1\}) \cap \Delta(A_1(G)) = \{0\}$.)

Aus (4.6) folgt weiter :

(4.10) Beispiel

Sei G eine kompakte, metrisierbare, nicht-polythetische Gruppe, H eine Untergruppe von $\text{Aut}(G)$, H endlich, mit $G \rtimes H$ nicht-

polythetisch (dabei sei $\phi: H \times G \rightarrow G$, $(y, x) \mapsto y(x)$) .

Dann gilt:

$$\dim H\text{-LI}(\mathcal{K}(G)) = \dim \text{LI}(\mathcal{K}(G)) = 2^{\mathbb{N}}.$$

Beweis: Da $G \rtimes H$ eine kompakte, metrisierbare, nicht polythetische Gruppe ist, folgt aus (4.6) :

$$2^{\mathbb{N}} = \dim \text{LI}(\mathcal{K}(G \rtimes H)) = \dim \text{BI}(\mathcal{K}(G \rtimes H)) .$$

Aus (3.16)a) erhält man : $\dim \text{LI}(\mathcal{K}(G \rtimes H)) = \dim \text{LI}(\mathcal{K}(G)) =$

$\Rightarrow \dim H\text{-LI}(\mathcal{K}(G))$, während aus (3.16)b) folgt :

$$\dim H\text{-LI}(\mathcal{K}(G)) = \dim \text{LI}(\mathcal{K}(G \rtimes H), H, 1) \leq \dim \text{BI}(\mathcal{K}(G \rtimes H)) = 2^{\mathbb{N}} .$$

Kapitel 2

LILF's auf Distributionen-und Funktionenräumen und
P-Approximierbarkeit von Elementen kompakt-erzeugter
LK-Gruppen

§1 Die Räume $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{D}(G)$ und $\mathcal{D}'(G)$ für LK-Gruppen G und Vererbungsseigenschaften für LILF's auf diesen Räumen

1.1 Definition der Räume $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{D}(G)$ und $\mathcal{D}'(G)$

Sei zunächst G eine separable LIE-Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}(G)$ und $\mathcal{D}(G)$ die Räume aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit beliebigem bzw. kompaktem Träger.

Sei $A \subset G$ kompakt, D ein Differentialoperator von endlicher Ordnung auf G . Dann ist

$$p_{D,A}: \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x \in A} |D(f)(x)|$$

eine Seminorm auf $\mathcal{E}(G)$. $\mathcal{E}(G)$ werde mit der durch die Seminormen $p_{D,A}$ ($A \subset G$ kompakt, D Differentialoperator endlicher Ordnung auf G) erzeugten lokalkonvexen Topologie versehen.

Für $A \subset G$ kompakt sei $\mathcal{D}(A \subset G) := \mathcal{E}(A \subset G) := \{f \in \mathcal{E}(G) \mid \text{supp } f \subset A\} = \{f \in \mathcal{D}(G) \mid \text{supp } f \subset A\}$, versehen mit der Relativtopologie bzgl. $\mathcal{E}(G)$. $\mathcal{D}(G)$ werde nun mit der induktiven Limestopologie bzgl. der Inklusionsabbildungen

$$\mathcal{D}(A \subset G) \hookrightarrow \mathcal{D}(G) \quad (A \subset G \text{ kompakt})$$

ausgestattet ¹⁾ ($\mathcal{D}(G)$ ist damit lokalkonvex).

Unter $\mathcal{E}'(G)$ bzw. $\mathcal{D}'(G)$ versteht man nun die starken Dualen von $\mathcal{E}(G)$ bzw. $\mathcal{D}(G)$.

Bruhat definierte nun die Räume $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{E}'(G)$ und $\mathcal{D}'(G)$ auch für beliebige LK-Gruppen G (siehe Bruhat [1]). Wir wollen im folgenden kurz die Konstruktion dieser Räume skizzieren; Genauer findet man in Bruhat [1] und in Johnson [1].

Sei G zunächst eine fastzusammenhängende LK-Gruppe (d.h. G/G_0 ist kompakt, wobei G_0 die Zusammenhangskomponente des Einselementes e von G bezeichne). Dann läßt sich G in folgender Weise als projektiver Limes von separablen LIE-Gruppen darstellen:

Sei $\mathcal{B} := \{K \subset G \mid K \text{ kompakter Normalteiler von } G, G/K \text{ LIE-Gruppe}\}$ (für $K \in \mathcal{B}$ ist G/K sogar separabel, denn G ist σ -kompakt, also ist auch G/K σ -kompakt und damit separabel, da jede LIE-Gruppe metrisierbar ist)

1) siehe Warner [1], Appendices, 2.1

2) siehe Montgomery/Zippin [1], 2.3.1 Lemma

Es gilt:

(1.1.1) $\bigcap \mathcal{B} = \{e\}$, $\mathcal{B}$ ist gerichtet bzgl. " $\supset$ ".

Ist $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, so hat man

(1.1.2) $\mathcal{O}$ in $\mathcal{B}$ konfinal $\iff \bigcap \mathcal{O} = \{e\}$.
(vgl. Bruhat [1], 1.)

Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ konfinal. Dann ist das System

$(\mathcal{O}, G/K, \text{pr}_{KK'}, (K \supset K', K, K' \in \mathcal{O}))$.

mit $\text{pr}_{KK'} : G/K' \rightarrow G/K$, $xK' \mapsto xK$ ($K \supset K', K, K' \in \mathcal{O}$)

projektiv, d.h. für $K, K', K'' \in \mathcal{O}$, $K \supset K' \supset K''$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} & G/K'' & \\ \text{pr}_{K'K''} \swarrow & & \searrow \text{pr}_{KK''} \\ G/K' & \xrightarrow{\text{pr}_{KK'}} & G/K \\ & \text{pr}_{KK'} & \end{array}$$

Es gilt:

(1.1.3) $G = \text{proj lim } (\mathcal{O}, G/K, \text{pr}_{KK'}, (K \supset K', K, K' \in \mathcal{O}))$

mit den kanonischen Projektionen $\text{pr}_K : G \rightarrow G/K$, $x \mapsto xK$ ($K \in \mathcal{B}$).

Sei nun $K \in \mathcal{B}$.

$$\mathcal{D}(G, K) := \left\{ f \in \mathcal{K}(G) \mid \exists_{g \in \mathcal{D}(G/K)} f = g \circ \text{pr}_K \right\}.$$

Man versteht $\mathcal{D}(G, K)$ mit der durch $\mathcal{D}(G/K)$ induzierten Finaltopologie.

Dann ist

(1.1.4) $\mathcal{D}(G) := \bigcup_{K \in \mathcal{B}} \mathcal{D}(G, K)$, ausgestattet mit der lokalkonvexen induktiven Limestopologie bzgl. der Inklusionen

$$\mathcal{D}(G, K) \hookrightarrow \mathcal{D}(G) \quad (K \in \mathcal{B}),$$

(lokalkonvexer) induktiver Limes des induktiven Systems

$(\mathcal{O}, \mathcal{D}(G/K), I_{K', K} \ (K \supset K', K, K' \in \mathcal{O}))$ ($\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ konfinal),

wobei $I_{K', K} : \mathcal{D}(G/K') \rightarrow \mathcal{D}(G/K)$, $f \mapsto f \circ \text{pr}_{KK'}$,

für $K, K' \in \mathcal{B}$, $K \supset K'$; die kanonischen Injektionen sind gegeben durch die Abbildungen $I_K : \mathcal{D}(G/K) \rightarrow \mathcal{D}(G)$, $f \mapsto f \circ \text{pr}_K$ ($K \in \mathcal{B}$).

Definiert man jetzt $\mathcal{D}'(G)$ als das starke Dual von $\mathcal{D}(G)$, so gilt:

(1.1.5) $\mathcal{D}'(G) = \text{proj lim } (\mathcal{O}, \mathcal{D}'(G/K), \varrho_{KK'}, (K \supset K', K, K' \in \mathcal{O})),$
 mit $\varrho_{KK'}: \mathcal{D}'(G/K') \rightarrow \mathcal{D}'(G/K)$, $S \mapsto S \circ I_{K'K}$
 für $K, K' \in \mathcal{B}$, $K \supset K'$, für jedes kofinale $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$.
 Die kanonischen Projektionen sind die Abbildungen
 $\varrho_K: \mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G/K)$, $S \mapsto S \circ I_K$ ($K \in \mathcal{B}$).

Ist schließlich G eine beliebige LK-Gruppe, so gilt nach Montgomery/Zippin [1], 2.3.1 Lemma:

(1.1.6) G besitzt eine offene fastzusammenhängende Untergruppe G_1 .

Sei R ein vollständiges linkes Repräsentantensystem von G bzgl. G_1 ¹⁾. Für jedes $x \in R$ werde definiert:

(1.1.7) $\mathcal{D}(xG_1) := \{f \in \mathcal{H}(G) \mid \exists_{g \in \mathcal{D}(G_1)} f = xg\}$
 (man beachte hierbei, daß $\mathcal{D}(G_1) \subset \mathcal{H}(G_1)$ vermöge der Abbildung $\mathcal{H}(G_1) \rightarrow \mathcal{H}(G)$, $f \mapsto \tilde{f}$, $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in G_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ als Vektorraum mit einem Teilraum von $\mathcal{H}(G)$ identifiziert werden kann); $\mathcal{D}(xG_1)$ werde mit der durch $\mathcal{D}(G_1)$ induzierten Topologie versehen.

Man kann nun $\mathcal{D}(G)$ folgendermaßen definieren:

(1.1.8) $\mathcal{D}(G) := \bigoplus_{x \in R} \mathcal{D}(xG_1)$ (=lokalconvexe direkte Summe)

Man kann weiter zeigen, daß die Definition von $\mathcal{D}(G)$ von der Wahl von G_1 und R unabhängig ist (Bruhat [1], 1., Prop. 4).

Wie vorhin wird $\mathcal{D}'(G)$ als starkes Dual von $\mathcal{D}(G)$ definiert; es gilt deshalb:

(1.1.9) $\mathcal{D}'(G) = \prod_{x \in R} \mathcal{D}'(xG_1)$ (= direktes Produkt)
 mit $\mathcal{D}'(xG_1) := (\mathcal{D}(xG_1))'$ mit der starken Topologie.

Nun zur Definition der Räume $\mathcal{E}(G)$ und $\mathcal{E}'(G)$:

Zunächst sei

(1.1.10) $\mathcal{E}(G) := \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall_{x \in G} \exists_{U \in \mathcal{U}_x} \exists_{g \in \mathcal{D}(G)} f|_U = g|_U\}.$

$\mathcal{E}(G)$ werde mit der Initialtopologie bzgl. der Abbildungen $\mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{D}(G)$, $f \mapsto gf$ ($g \in \mathcal{D}(G)$) versehen.

1) Unter einem linken Repräsentantensystem von G bzgl. einer Untergruppe H werde ein Repräsentantensystem bzgl. der Relation $\sim^H$ auf G mit $x \sim^H y : \Leftrightarrow xH = yH$ ($x, y \in G$) verstanden.

Man hat dann:

(1.1.11) $\mathcal{D}(G) = \{f \in \mathcal{E}(G) \mid \text{supp } f \text{ kompakt}\}$, die Topologie von $\mathcal{D}(G)$ ist feiner als die von $\mathcal{E}(G)$ auf $\mathcal{D}(G)$ induzierte, $\mathcal{D}(G)$ ist bzgl. der von $\mathcal{E}(G)$ induzierten Relativtopologie dicht in $\mathcal{E}(G)$.

$\mathcal{E}'(G)$ sei das starke Dual von $\mathcal{E}(G)$.

Sei $S \in \mathcal{D}'(G)$. Dann kann man definieren: (vgl. Bruhat [1], 3.)

(1.1.12) $\text{supp } S := \bigcap \{B \subset G \mid B = \overline{B}, \bigvee_{g \in \mathcal{D}(G)} S(g) = 0\}$.
("Träger von S") $\text{supp } g \cap B = \emptyset$

Es gilt für $g \in \mathcal{D}(G)$ mit $\text{supp } g \cap \text{supp } S = \emptyset$: $S(g) = 0$.

Mit dieser Definition erhält man:

(1.1.13) $\mathcal{E}'(G)$ kann mit dem Teilraum $\{S \in \mathcal{D}'(G) \mid \text{supp } S \text{ kompakt}\}$ von $\mathcal{D}'(G)$ identifiziert werden (denn es gilt für $S \in \mathcal{D}'(G)$:
S stetig bzgl. der von $\mathcal{E}(G)$ auf $\mathcal{D}(G)$ induzierten Topologie und damit auf $\mathcal{E}(G)$ fortsetzbar $\iff$ $\text{supp } S$ kompakt)
(siehe Bruhat [1], 3., Prop.3).

Da die Abbildung $C(G) \longrightarrow \mathcal{D}'(G)$, $f \mapsto S_f$ mit $S_f(g) := \int_G f(x)g(x) d\mu_G(x)$ für $g \in \mathcal{D}(G)$ ¹⁾ injektiv ist, kann auch $C(G)$ mit einem linearen Teilraum von $\mathcal{D}'(G)$ identifiziert werden

(denn: $f \in C(G), f \neq 0 \Rightarrow \exists U \subset G$ offen $f|_U > 0$ (o.B.d.A.); wegen $\overline{U}$ kompakt

Bruhat [1], 2., Prop.2 gibt es ein $g \in \mathcal{D}(G), g(U) = \{1\}$, d.h. $S_f(g) = \int_G f(x)g(x) d\mu_G(x) > 0$, d.h. $S_f \neq 0$).

Gemäß Bruhat [1], 4., Th.1, Cor.2 und 3, Prop.6 und 8. Cor.2 gilt:

(1.1.14) $\mathcal{D}(G), \mathcal{D}'(G), \mathcal{E}(G)$ und $\mathcal{E}'(G)$ sind vollständig und reflexiv. $\mathcal{D}(G)$ ist dicht in $\mathcal{D}'(G)$ und $\mathcal{E}'(G)$ (als Raum von regulären Distributionen).

(Man beachte: $\text{supp } S_f = \text{supp } f$ für $f \in C(G)$!)

1) $S_f \in \mathcal{D}'(G)$ (für $f \in C(G)$) folgt aus der Tatsache, daß die durch (1.1.8) auf $\mathcal{D}(G)$ definierte Topologie feiner als die durch $\mathcal{H}(G)$ induzierte ist (vgl. Johnson [1], I.3.1)

Tensorprodukt, Multiplikation, Faltung und Linkstranslation von Distributionen

Seien G und H beliebige LK-Gruppen.

(1.1.15) $\mathcal{D}(G \times H) \cong \mathcal{D}(G) \otimes \mathcal{D}(H)$ (Vervollständigung des Tensorprodukts $\mathcal{D}(G) \otimes \mathcal{D}(H)$ mit der induktiven Tensorprodukttopologie) ,

$\mathcal{D}(G) \otimes \mathcal{D}(H)$ kann mit dem dichten Teilraum

$$\text{span}\{h \in \mathcal{D}(G \times H) \mid \exists f \in \mathcal{D}(G) \exists g \in \mathcal{D}(H) \ h(x,y) = f(x)g(y) \text{ für } x \in G, y \in H\}$$

von $\mathcal{D}(G \times H)$ identifiziert werden.

Für $f \in \mathcal{D}(G), g \in \mathcal{D}(H)$ sei $f \otimes g(x,y) := f(x)g(y)$ für $x \in G, y \in H$, d.h. $f \otimes g \in \mathcal{D}(G) \otimes \mathcal{D}(H)$

(siehe Bruhat [1], 5. Théorème 3, Johnson [1], (I.2, 19) und I.2.16 Theorem).

(1.1.16) $\mathcal{D}'(G \times H) = \mathcal{D}'(G) \otimes \mathcal{D}'(H)$ (Vervollständigung des Tensorprodukts $\mathcal{D}'(G) \otimes \mathcal{D}'(H)$ mit der projektiven Tensorprodukttopologie) ,

$\mathcal{D}'(G) \otimes \mathcal{D}'(H)$ kann mit dem dichten Teilraum

$$\text{span}\{S \in \mathcal{D}'(G \times H) \mid S_1 \in \mathcal{D}'(G) \ S_2 \in \mathcal{D}'(H) \ S(f \otimes g) = S_1(f)S_2(g) \text{ für } f \in \mathcal{D}(G), g \in \mathcal{D}(H)\}$$

von $\mathcal{D}'(G \times H)$ identifiziert werden.

Für $S_1 \in \mathcal{D}'(G), S_2 \in \mathcal{D}'(H)$ sei $S_1 \otimes S_2 \in \mathcal{D}'(G) \otimes \mathcal{D}'(H)$ definiert durch : $S_1 \otimes S_2(f \otimes g) := S_1(f)S_2(g)$ für $f \in \mathcal{D}(G), g \in \mathcal{D}(H)$.

(siehe Bruhat [1], 5., Théorème 3, Johnson [1], (I.2, 20) und I.2.17 Theorem).

Für eine beliebige LK-Gruppe G kann man folgende Abbildung erklären:

(1.1.17) $\bullet : \mathcal{E}(G) \times \mathcal{D}'(G) \longrightarrow \mathcal{D}'(G), (f, S) \longmapsto f \bullet S$,
wobei $f \bullet S(g) := S(fg)$ für $f \in \mathcal{E}(G), S \in \mathcal{D}'(G), g \in \mathcal{D}(G)$
("Multiplikation von Funktionen mit Distributionen").

Die Faltung von Distributionen kann nun folgendermaßen definiert werden:

Seien $f \in \mathcal{D}(G)$, $S \in \mathcal{E}'(G)$, $T \in \mathcal{D}'(G)$, so hat man zunächst:

- 1) Die Abbildung $\tilde{f}: G \times G \longrightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(xy)$ ist ein Element von $\mathcal{E}(G \times G)$
- 2) $\tilde{f} \bullet (S \otimes T) \in \mathcal{E}'(G \times G)$ (vgl. (1.1.16) und (1.1.17))
(Bruhat [1], 6.)

Deshalb kann man folgende Abbildung erklären:

$$(1.1.18) \quad * : \mathcal{E}'(G) \times \mathcal{D}'(G) \longrightarrow \mathcal{D}'(G), (S, T) \longmapsto S * T, \\ \text{mit } S * T(f) := (\tilde{f} \bullet (S \otimes T))(1) \quad (f \in \mathcal{D}(G)) \\ \text{("Faltung von Distributionen") } +)$$

* ist in beiden Argumenten linear und stetig (Bruhat [1], 6.).
Ist G eine LIE-Gruppe, stimmt * aus (1.1.18) mit der Faltung auf $\mathcal{E}'(G) \times \mathcal{D}'(G)$ überein, wie sie üblicherweise für Distributionen auf LIE-Gruppen definiert wird.

* hat weiter folgende Eigenschaften:

- (1.1.19) a) $\mathcal{E}'(G) * \mathcal{E}'(G) \subset \mathcal{E}'(G)$ b) $\mathcal{E}'(G) * \mathcal{E}(G) \subset \mathcal{E}(G)$
c) $\mathcal{D}(G) * \mathcal{D}'(G) \subset \mathcal{E}(G)$ d) $\mathcal{E}'(G) * \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(G)$,
wobei für $f \in \mathcal{D}(G)$, $g \in \mathcal{E}(G)$, $S \in \mathcal{E}'(G)$, $T \in \mathcal{D}'(G)$, $x \in G$ gilt:
 $S * g(x) = S(x(\check{g}))$ mit $\check{g}(y) := g(y^{-1})$ ($y \in G$)
 $f * T(x) = \Delta_G(x^{-1}) T((\Delta_G f)^x)$ ($(\Delta_G f)$ entsprechend wie $\check{g}$).

- (1.1.20) a) * ist "assoziativ", d.h. $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(G)$, $T \in \mathcal{D}'(G) \implies \\ \implies (S_1 * S_2) * T = S_1 * (S_2 * T)$.

- b) Ist G abelsch, so gilt für $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(G)$:
 $S_1 * S_2 = S_2 * S_1$.

- c) $S_1 \in \mathcal{E}'(G)$, $S_2 \in \mathcal{D}'(G)$, $f \in \mathcal{D}(G)$, $g \in \mathcal{E}(G)$
 $S_1 * S_2(f) = S_2(\check{S}_1 * f) = S_1(f * \check{S}_2)$, wobei
 $\check{S}_1(h) := S_1(\check{h})$ (siehe (1.1.19)) für $h \in \mathcal{D}(G)$
 $\check{S}_2(h) := S_2((\Delta_G h))$ " "
Falls $S_2 \in \mathcal{E}'(G)$ gilt analog:
 $S_1 * S_2(g) = S_2(\check{S}_1 * g)$

(siehe Bruhat [1], 6.)

Wir definieren folgende Elemente von $\mathcal{E}'(G)$:

-
- +) Bei Bruhat und Johnson wird die Faltung auf einem größeren Teilraum von $\mathcal{D}'(G) \times \mathcal{D}'(G)$ erklärt. Da wir im folgenden jedoch nur Faltungen vom Typ $S * T$ mit $S \in \mathcal{E}'(G)$, $T \in \mathcal{D}'(G)$ zu betrachten haben, beschränken wir uns auf die Definition für diesen Fall.

(1.1.21) Sei $a \in G$. ${}^a\delta: \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(a)$ ist ein Element von $\mathcal{E}'(G)$.

$\delta := {}^e\delta$. (Falls Verwechslungen möglich sind, schreiben wir auch δ_G, δ_H usw.)

Ist $G = G_1 \times G_2$ (G_1, G_2 LK-Gruppen, G_1 abelsch), so folgt für $S \in \mathcal{E}'(G)$, $S_1 \in \mathcal{E}'(G_1)$:

$(S_1 \otimes \delta_{G_2}) * S = S * (S_1 \otimes \delta_{G_2})$ (wegen (1.1.19) und (1.1.20)c), wie man leicht nachrechnet).

Mit (1.1.19), (1.1.20) und (1.1.21) folgt:

(1.1.22) $\mathcal{E}'(G)$ ist bzgl. der üblichen Addition, der skalaren Multiplikation und der Faltung $*$ eine $\mathbb{C}$ -Algebra mit Einselement δ . Ist G abelsch, so ist $\mathcal{E}'(G)$ kommutativ. Die Halbgruppe $(\mathcal{E}'(G), *)$ operiert von links auf $\mathcal{Q}'(G)$.

Für reguläre Distributionen stimmt die in (1.1.18) definierte Faltung mit der Faltung, wie sie üblicherweise für Funktionen $f, g \in \mathcal{K}(G)$ erklärt wird, überein:

Sei $f * g: G \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu_G(y)$ ($f, g \in \mathcal{K}(G)$)

Dann gilt: $S_f * g = S_f * S_g$, wie man sofort nachrechnet.

Mittels der Faltung $*$ läßt sich auf den Räumen $\mathcal{Q}(G), \mathcal{E}(G), \mathcal{Q}'(G), \mathcal{E}'(G)$ eine Linkstranslation erklären:

(1.1.23) Sei $a \in G, S \in \mathcal{Q}'(G)$. Dann gilt:

${}^aS := {}^a\delta * S \in \mathcal{Q}'(G)$; die Abbildung

$G \times \mathcal{Q}'(G) \rightarrow \mathcal{Q}'(G), (a, S) \mapsto {}^aS$, stellt eine Operation von links von G auf $\mathcal{Q}'(G)$ dar; die Einschränkungen dieser Abbildung auf $G \times \mathcal{E}'(G), G \times \mathcal{Q}(G)$ und $G \times \mathcal{E}(G)$ stellen Operationen von links von G auf den Räumen $\mathcal{E}'(G), \mathcal{Q}(G)$ bzw. $\mathcal{E}(G)$ dar (vgl. (1.1.19)).

Für die in (1.1.23) definierte Linkstranslation auf $\mathcal{Q}'(G)$ gelten folgende Aussagen:

(1.1.24) a) Betrachtet man für $f \in \mathcal{C}(G), a \in G$ die Funktion af (wie in (0.3)), so gilt: ${}^af \in \mathcal{K}(G)$ bzw. $\mathcal{E}(G)$ oder $\mathcal{Q}(G)$, falls Entsprechendes für f gilt.

Man hat: ${}^aS_f = S_{a_f}$, d.h. die in (1.1.23) eingeführte Linkstranslation stimmt auf $\mathcal{C}(G)$ mit der üblichen überein.

b) Sei $S \in \mathcal{D}'(G)$, $a \in G$, $f \in \mathcal{D}(G)$. Dann:

$${}^a S(f) = S({}^{a^{-1}} f) \quad (\text{analog für } S \in \mathcal{E}'(G), f \in \mathcal{E}(G))$$

$$c) S \in \mathcal{E}'(G), T \in \mathcal{D}'(G), a \in G \implies {}^a S * T = {}^a (S * T) .$$

"Linksinvariante" Teilräume von $\mathcal{D}'(G)$ kann man nun definieren durch (in Verallgemeinerung zu (0.3)) :

(1.1.25) Definition

Sei E ein linearer Teilraum von $\mathcal{D}'(G)$, $B \subset G$.

a) E heißt linksinvariant, wenn für alle $a \in G$, $S \in E$ auch ${}^a S \in E$ gilt.

b) E sei linksinvariant.

$$\Delta_B(E) := \text{span}\{S - {}^a S \mid S \in E, a \in B\} \quad , \quad \Delta(E) := \Delta_G(E) .$$

$$LI_B(E) := (\Delta_B(E))^\perp \quad , \quad LI(E) := LI_G(E) .$$

Die Elemente M von $LI_B(E)$ nennen wir (vgl. Kap. 1, §1) B-LILF's bzw. LILF's, falls $B=G$.

Ist der linksinvariante Teilraum E von $\mathcal{D}'(G)$ bzgl. "*" ein Unterring von $\mathcal{E}'(G)$, so gilt wegen der Assoziativität von "*" : $\Delta_B(E)$ ist ein Rechtsideal von E ¹⁾ (für $B \subset G$) .

Wie in Kap. 1, (1.6) gilt:

(1.1.26) Sei E ein linksinvarianter Teilraum von $\mathcal{D}'(G)$,

$B \subset G$, dann : $LI_B(E) = LI_{[B]}(E)$ (bzw. $\Delta_B(E) = \Delta_{[B]}(E)$) .

(Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von Kap. 1, (1.6)) .

Offenbar sind $\mathcal{D}'(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{E}(G)$ linksinvariante Teilräume von $\mathcal{D}'(G)$. Es gilt:

(1.1.27) a) $\mu_G|_{\mathcal{D}(G)} \in LI(\mathcal{D}(G)) \setminus \{0\}$.

$\mu_G|_{\mathcal{D}(G)}$ ist das einzige (bis auf Vielfache) stetige LILF auf $\mathcal{D}(G)$ (siehe Johnson [1], II.3.1 Theorem) .

b) $\tilde{\mu}_G : \mathcal{E}'(G) \longrightarrow \mathbb{C}$, $S \mapsto S(1)$, stellt ein Element von $LI(\mathcal{E}'(G))$ dar. $\tilde{\mu}_G$ ist stetig , $\tilde{\mu}_G|_{\mathcal{D}(G)}$

1) Unter einem Rechtsideal I eines Ringes R werde im folgenden ein Unterring von R mit der Eigenschaft
 $f \in I$, $g \in R \implies fg \in I$ verstanden .

stimmt mit μ_G überein (bei Identifizierung von $\mathcal{D}(G)$ mit dem entsprechenden Raum von regulären Distributionen):

$$f \in \mathcal{D}(G) \implies \tilde{\mu}_G(s_f) = s_f(1) = \int_G f(x) d\mu_G(x) = \mu_G(f).$$

Da $\mathcal{D}(G)$ in $\mathcal{E}'(G)$ dicht ist und die von $\mathcal{E}'(G)$ auf $\mathcal{D}(G)$ induzierte Topologie gröber ist als die übliche, ist $\tilde{\mu}_G$ ebenfalls bis auf Vielfache das einzige stetige LILF auf $\mathcal{E}'(G)$.

- c) Ist G nicht kompakt, so besitzen $\mathcal{D}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$ kein stetiges LILF $\neq 0$, denn wegen der Reflexivität von $\mathcal{D}(G)$ und $\mathcal{E}'(G)$ entspricht einem stetigen LILF M auf $\mathcal{D}'(G)$ bzw. $\mathcal{E}(G)$ ein linksinvariantes Element von $\mathcal{D}(G)$ bzw. $\mathcal{E}'(G)$, d.h. $M = 0$.

1.2 Vererbungseigenschaften für LILF's auf $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{Q}(G)$, $\mathcal{Q}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von G .

In diesem Abschnitt werden analog zu Kap.1.§2 Zusammenhänge zwischen $LI_B(\mathcal{E}'(G))$ und $LI_B(\mathcal{E}'(G/H))$ für $B \in G$, $B' \in G/H$ untersucht. Obwohl man die Räume $\mathcal{E}'$ und $\mathcal{Q}'$ auch für homogene Räume G/H' (H' abgeschlossene Untergruppe von G) definieren kann¹⁾ und daher wie im Kap.1 Beziehungen zwischen LILF-Räumen auf $\mathcal{E}'(G)$ und $\mathcal{E}'(G/H')$ untersuchen könnte, wollen wir der Einfachheit halber hier nur LILF-Räume über Distributionen auf LK-Gruppen diskutieren.

Ist H eine offene Untergruppe von G (nicht notwendig Normalteiler), so besteht ein Zusammenhang zwischen den Räumen $LI_F(\mathcal{E}'(G))$ und $LI_E(\mathcal{E}'(H))$ für geeignete $F \in G$, $E \in H$; diese Beziehungen stehen in Analogie zu entsprechenden Aussagen für $LI_F(\mathcal{H}(G))$ und $LI_E(\mathcal{H}(H))$ ($F \in G$, $E \in H$), wie sie in Roelcke et al. [1], 2.Prop. bzw. Asam [1], 7.1 für den Fall $F=G$, $E=H$ nachgewiesen wurden. Weiter wird in diesem Abschnitt gezeigt, daß auch zwischen $LI_E(\mathcal{Q}'(G))$ und $LI_E(\mathcal{Q}'(H))$, $LI_E(\mathcal{E}(G))$ und $LI_E(\mathcal{E}(H))$ (für $E \in H$) gewisse Beziehungen bestehen.

Gemäß Johnson [2], Prop.1, Prop.2, Prop.3 gelten für $\mathcal{Q}(G)$ analoge Vererbungsregeln wie für $\mathcal{H}(G)$. Wir werden diese in etwas allgemeinerer Form hier angeben (vgl. (1.2.14)-(1.2.16)).

Zunächst nun zum Vergleich von $LI_B(\mathcal{E}'(G))$ und $LI_{B'}(\mathcal{E}'(G/H))$ für eine beliebige LK-Gruppe G und einen abgeschlossenen Normalteiler H von G , $B \in G$, $B' \in G/H$.

Sei $T_H: \mathcal{H}(G) \rightarrow \mathcal{H}(G/H)$ wie Kap.1, (2.1). T_H läßt sich folgendermaßen auf $\mathcal{E}'(G)$ fortsetzen:

$$(1.2.1) \quad \tilde{T}_H: \mathcal{E}'(G) \rightarrow \mathcal{E}'(G/H), \quad \tilde{T}_H(S)(f) := S(f \cdot \pi_H) \\ (S \in \mathcal{E}'(G), f \in \mathcal{E}(G/H))$$

ist wohldefiniert, denn:

die Abbildung $\mathcal{E}(G/H) \rightarrow \mathcal{E}(G)$, $f \mapsto f \circ \pi_H$, ist stetig (Bruhat [1], 7., Prop.8); deshalb ist für

1) siehe Bruhat [1], 8.

$S \in \mathcal{E}'(G)$ die Abbildung $\mathcal{E}(G/H) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto S(f \circ \pi_H)$ stetig, d.h. es gilt offenbar $\tilde{T}_H(S) \in \mathcal{E}'(G/H)$.

$\tilde{T}_H$ ist linear und Fortsetzung von T_H (dabei werde $\mathcal{H}(G)$ wieder als linearer Teilraum von $\mathcal{E}'(G)$ aufgefaßt), denn:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_H(S_f)(g) &= S_f(g \circ \pi_H) = \int_G f(x) g(xH) d\mu_G(x) = \\ &= \int_{G/H} \int_H f(xy) g(xH) d\mu_H(y) d\mu_{G/H}(xH) = \\ &= \int_{G/H} g(xH) T_H(f)(xH) d\mu_{G/H}(xH) = S_{T_H(f)}(g) \quad (g \in \mathcal{D}(G/H), f \in \mathcal{K}(G/H)). \end{aligned}$$

Es gilt:

(1.2.2) $\text{supp } \tilde{T}_H(S) \subset \pi_H(\text{supp } S)$ für alle $S \in \mathcal{E}'(G)$, denn sei $S \in \mathcal{E}'(G), g \in \mathcal{D}(G/H)$ mit $\text{supp } g \cap \pi_H(\text{supp } S) = \emptyset$, so folgt $\tilde{T}_H(S)(g) = S(g \circ \pi_H) = 0$, da $\text{supp}(g \circ \pi_H) \subset \pi_H^{-1}(\text{supp } g)$, d.h. $\text{supp } \tilde{T}_H(S) \subset \pi_H(\text{supp } S)$.

$\tilde{T}_H$ hat ferner folgende Eigenschaften:

(1.2.3) $\tilde{T}_H$ ist stetig (bzgl. der starken Topologien auf $\mathcal{E}'(G)$ und $\mathcal{E}'(G/H)$), denn $\tilde{T}_H$ ist die Transponierte der Abbildung $\mathcal{E}(G/H) \rightarrow \mathcal{E}(G), f \mapsto f \circ \pi_H$ (siehe (1.2.1)).

(1.2.4) $\tilde{T}_H(S_1 * S_2) = \tilde{T}_H(S_1) * \tilde{T}_H(S_2)$ für alle $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(G)$:

Gemäß Reiter [1], Chap. 3, § 5.3 gilt:

$$T_H(f_1 * f_2) = T_H(f_1) * T_H(f_2) \quad \text{für alle } f_1, f_2 \in \mathcal{K}(G),$$

wegen $\tilde{T}_H|_{\mathcal{K}(G)} = T_H$ stimmen also die stetigen Abbildungen

$$\mathcal{E}'(G) \rightarrow \mathcal{E}'(G/H), S_1 \mapsto \tilde{T}_H(S_1 * S_2) \quad \text{und}$$

$$\mathcal{E}'(G) \rightarrow \mathcal{E}'(G/H), S_1 \mapsto \tilde{T}_H(S_1) * \tilde{T}_H(S_2) \quad (S_2 \in \mathcal{E}'(G))$$

auf dem dichten Teilraum $\mathcal{K}(G) \subset \mathcal{E}'(G)$ überein, d.h. sie sind identisch.

Aus (1.2.4) erhält man mit $S_1 := {}^a\delta$ und wegen $T_H({}^a\delta) = {}^{aH}\delta$ ($a \in G$):

$$(1.2.5) \quad \tilde{T}_H({}^a S) = {}^{aH} \tilde{T}_H(S) \quad \text{für alle } a \in G, S \in \mathcal{E}'(G).$$

Ferner ist $\tilde{T}_H$ wie T_H surjektiv:

Um dies zu beweisen, konstruieren wir eine Rechtsinverse zu

$\tilde{T}_H$:

Aus der Parakompaktheit von G/H und Bruhat [1], 1., Prop. 2 folgt zunächst, daß G/H eine Teilung der Einheit $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{D}_+(G/H) := \mathcal{D}(G/H) \cap \mathcal{H}_+(G/H)$ besitzt¹⁾. Gemäß Bruhat [1], 8., Prop. 10, stellt $T_H|_{\mathcal{D}(G)}$ einen stetigen Epimorphismus auf $\mathcal{D}(G/H)$ dar; wie im Fall $\mathcal{H}(G)$ gilt auch hier: $\mathcal{D}_+(G/H) = T_H(\mathcal{D}_+(G))$. Für jedes $i \in I$ werde ein $g_i \in \mathcal{D}_+(G) := \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{H}_+(G)$ gewählt mit $T_H(g_i) = f_i$.

Zu $\Gamma := (g_i)_{i \in I}$ definieren wir nun folgende Abbildung:

$$(1.2.6) \quad T^\Gamma: \mathcal{E}'(G/H) \longrightarrow \mathcal{E}'(G), \quad S \longmapsto T^\Gamma(S) \text{ mit} \\ T^\Gamma(S)(f) := \sum_{i \in I} S(T_H(g_i f)) \quad \text{für } S \in \mathcal{E}'(G/H), f \in \mathcal{E}(G).$$

Dann gilt:

(1.2.7) Lemma

Sei T^Γ wie oben.

T^Γ ist wohldefiniert, linear und rechtsinvers zu $\tilde{T}_H$.

Beweis:

Sei $S \in \mathcal{E}'(G/H)$, dann ist $K := \text{supp } S$ kompakt.

Sei U eine kompakte Umgebung von K . Wegen Bruhat [1], 1., Prop. 2 gibt es ein $f_0 \in \mathcal{D}(G/H)$ mit $f_0|_U = 1$.

Da $(\text{supp } f_i)_{i \in I}$ eine lokalendliche Familie ist, gilt:

$$A(S) := \{i \in I \mid \text{supp } f_i \cap \text{supp } f_0 \neq \emptyset\} \text{ ist endlich.}$$

$$\text{Ferner: } A_1(S) := \left\{ i \in I \mid \exists_{f \in \mathcal{E}(G)} S(T_H(g_i f)) \neq 0 \right\} \subset A(S), \text{ denn:}$$

Sei $i \in I$ mit $S(T_H(g_i f)) \neq 0$ für ein $f \in \mathcal{E}(G)$. Dann folgt:

$K \cap \text{supp } T_H(g_i f) \neq \emptyset$; wegen $\text{supp } T_H(g_i f) \subset \pi_H(\text{supp } g_i) = \text{supp } f_i$ (siehe Kap. 1, (2.8)) und $K \subset \text{supp } f_0$ gilt deshalb:

$\text{supp } f_i \cap \text{supp } f_0 \neq \emptyset$, d.h. $i \in A(S)$.

$T^\Gamma(S)$ ist daher wohldefiniert und linear nach Definition auf $\mathcal{E}(G)$.

Weiter ist $T^\Gamma(S)$ stetig auf $\mathcal{E}(G)$, denn die Abbildungen

$\mathcal{E}(G) \longrightarrow \mathcal{E}(G/H), \quad f \longmapsto T_H(g_i f) \quad (i \in I)$ sind stetig (Bruhat [1], 8., Prop. 10); aus der Endlichkeit von $A(S)$ folgt deshalb: $T^\Gamma(S) \in \mathcal{E}'(G)$.

Also ist auch T^Γ wohldefiniert; aus der Definition folgt die Linearität von T^Γ .

Es bleibt noch zu zeigen: $\tilde{T}_H \circ T^\Gamma = \text{id}_{\mathcal{E}'(G/H)}$.

Sei $S \in \mathcal{E}'(G/H), f \in \mathcal{D}(G/H), f_0 \in A(S)$ wie oben.

1) vgl. Kap. 1, Beweis von (2.13)

$$\begin{aligned}
 \text{Dann folgt: } \tilde{T}_H(T^\Gamma(S))(f) &= T^\Gamma(S)(f \circ \pi_H) = \\
 &= \sum_{i \in A(S)} S(T_H(g_i(f \circ \pi_H))) = \\
 &= \sum_{i \in A(S)} S(f_i f) = S\left(\sum_{i \in A(S)} f_i f\right) = \\
 &= S(f \circ \sum_{i \in A(S)} f_i f) = f \circ S(f \circ \sum_{i \in I} f_i) = \\
 &= f \circ S(f \circ 1) = S(f \circ f) = S(f).
 \end{aligned}$$

$$\text{Insgesamt: } \tilde{T}_H \circ T^\Gamma = \text{id}_{\mathcal{E}'(G/H)}.$$

Analog zu Kap. 1¹⁾ erhält man folgende Beziehungen zwischen $\text{LI}_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H))$ und $\text{LI}_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G))$ (für $B \subset G$):

(1.2.8) Satz

Sei $B \subset G$. Die Transponierte $\tilde{T}_H^t$ von $\tilde{T}_H$ induziert einen Monomorphismus von $\text{LI}_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H))$ in $\text{LI}_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G))$.

Beweis:

$$\tilde{T}_H^t(\text{LI}_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H))) \subset \text{LI}_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G)), \text{ denn:}$$

Sei $M \in \text{LI}_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H))$, $a \in B \cup H$, $S \in \mathcal{E}'(G)$; dann folgt:

$$\tilde{T}_H^t(M)(^a S) = M(\tilde{T}_H(^a S)) = M(^{aH} \tilde{T}_H(S)) = M(\tilde{T}_H(S)) = \tilde{T}_H^t(M)(S).$$

Da $\tilde{T}_H$ surjektiv ist, ist $\tilde{T}_H^t$ injektiv.

Wie in Kap. 2²⁾ hat man auch hier folgende Charakterisierung für $\tilde{T}_H^t(\text{LI}_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H)))$ in $\text{LI}_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G))$:

(1.2.9) Satz

Sei $B \subset G$.

Dann sind für $M \in \text{LI}_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G))$ (sogar für $M \in \text{LI}_B(\mathcal{E}'(G))$)

folgende Aussagen äquivalent:

- $M \in \tilde{T}_H^t(\text{LI}_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H)))$
- $\text{Kern } \tilde{T}_H^t \subset \text{Kern } M$
- $M(\overline{T}_H(g) \cdot S) = M(g \cdot \overline{T}_H(S))$ für alle $g \in \mathcal{Q}(G)$ und alle $S \in \mathcal{E}'(G)$
(dabei sei $\overline{T}_H: \mathcal{Q}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$, $f \mapsto T_H(f) \circ \pi_H$; $\overline{T}_H$ ist stetig, da $T_H|_{\mathcal{Q}(G)}: \mathcal{Q}(G) \rightarrow \mathcal{Q}(G/H)$ und $\mathcal{E}(G/H) \rightarrow \mathcal{E}(G)$,
 $f \mapsto f \circ \pi_H$ stetig sind (Bruhat [1], 7., Prop. 8, 8., Prop. 10);
die Abbildung $\overline{T}_H: \mathcal{E}'(G) \rightarrow \mathcal{Q}'(G)$, $S \mapsto S \circ \overline{T}_H$, ist daher

1) vgl. Kap. 1, (2.10).

2) vgl. Kap. 1, (2.13).

wohldefiniert).

$$d) M(\sum_{i \in I} \overline{T}_H(g_i) \cdot S) = M(\sum_{i \in I} g_i \cdot \widetilde{T}_H(S)) \text{ für alle } S \in \mathcal{E}'(G)$$

und alle $(g_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}(G)$ mit $(\pi_H(\text{supp } g_i))_{i \in I}$ lokalendlich in G/H).

Beweis:

zu "a) $\Rightarrow$ b)": Sei $M \in \widetilde{T}_H^{tt}(\text{LI } \pi_H(B))(\mathcal{E}'(G/H))$

$$\exists_{M_0 \in \text{LI } \pi_H(B)} M = M_0 \circ \widetilde{T}_H \implies \text{Kern } \widetilde{T}_H \subset \text{Kern } M.$$

zu "b) $\Rightarrow$ c)": Es gelte $\text{Kern } \widetilde{T}_H \subset \text{Kern } M$.

Seien $S \in \mathcal{E}'(G), g \in \mathcal{D}(G)$. Dann gilt:

$S_0 := \overline{T}_H(g) \cdot S - g \cdot \widetilde{T}_H(S) \in \text{Kern } \widetilde{T}_H$, denn sei $f \in \mathcal{D}(G/H)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_H(S_0)(f) &= S_0(f \circ \pi_H) = (\overline{T}_H(g) \cdot S - g \cdot \widetilde{T}_H(S))(f \circ \pi_H) = \\ &= S(\overline{T}_H(g)(f \circ \pi_H)) - \widetilde{T}_H(S)(g(f \circ \pi_H)) = \\ &= S(\overline{T}_H(g(f \circ \pi_H))) - \widetilde{T}_H(S)(g(f \circ \pi_H)) = \\ &= \widetilde{T}_H(S)(g(f \circ \pi_H)) - \widetilde{T}_H(S)(g(f \circ \pi_H)) = 0. \end{aligned}$$

zu "c) $\Rightarrow$ d)": Es gelte c).

Sei $S \in \mathcal{E}'(G), (g_i)_{i \in I} \subset \mathcal{D}(G)$ mit $(\pi_H(\text{supp } g_i))_{i \in I}$ lokalendlich in G/H .

$A := \{i \in I \mid \pi_H(\text{supp } g_i) \cap \pi_H(\text{supp } S) \neq \emptyset\}$ ist daher endlich.

$A_1 := \{i \in I \mid \overline{T}_H(g_i) \cdot S + 0\} \subset A$, denn:

$$i \in A_1 \implies \exists_{f \in \mathcal{D}(G)} S(\overline{T}_H(g_i)f) \neq 0 \implies$$

$$\implies \text{supp } S \cap \text{supp } \overline{T}_H(g_i)f \neq \emptyset \implies$$

$$\implies \text{supp } S \cap \text{supp } \overline{T}_H(g_i) \neq \emptyset \implies$$

$$\implies \pi_H(\text{supp } S) \cap \pi_H(\text{supp } g_i) \neq \emptyset \quad (\text{Kap. 1, (2.8)}) \implies$$

$$\implies i \in A.$$

Der Ausdruck $\sum_{i \in I} \overline{T}_H(g_i) \cdot S$ ist daher definiert und gleich $\sum_{i \in A} \overline{T}_H(g_i) \cdot S$.

Ebenso gilt:

$A_2 := \{i \in I \mid g_i \cdot \widetilde{T}_H(S) + 0\} \subset A$, denn:

$$i \in A_2 \implies \exists_{f \in \mathcal{D}(G)} \widetilde{T}_H(S)(g_i f) \neq 0 \implies S(\overline{T}_H(g_i f)) \neq 0 \implies$$

$$\begin{aligned} \implies \text{supp } S \cap \text{supp } \overline{T}_H(g_i f) &\neq \emptyset \implies \\ \implies \pi_H(\text{supp } S) \cap \pi_H(\text{supp } g_i f) &\neq \emptyset \implies \\ \implies \pi_H(\text{supp } S) \cap \pi_H(\text{supp } g_i) &\neq \emptyset \implies i \in A. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\sum_{i \in I} g_i \cdot \widetilde{T}_H(S)$ ist deshalb ebenfalls definiert und stimmt mit $\sum_{i \in A} g_i \cdot \widetilde{T}_H(S)$ überein.

Es folgt:

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{i \in I} \overline{T}_H(g_i) \cdot S\right) &= M\left(\sum_{i \in A} \overline{T}_H(g_i) \cdot S\right) = \sum_{i \in A} M(\overline{T}_H(g_i) \cdot S) = \\ &= \sum_{i \in A} M(g_i \cdot \widetilde{T}_H(S)) = M\left(\sum_{i \in A} g_i \cdot \widetilde{T}_H(S)\right) = M\left(\sum_{i \in I} g_i \cdot \widetilde{T}_H(S)\right). \end{aligned}$$

zu "a) $\implies$ b)": Sei $S \in \text{Kern } \widetilde{T}_H$; es gelte d).

Zunächst gilt: $S \in \text{Kern } \widetilde{T}_H$, denn sei $f \in \mathcal{D}(G)$:

$$\widetilde{T}_H(S)(f) = S(\overline{T}_H(f)) = S(T_H(f) \circ \pi_H) = \widetilde{T}_H(S)(T_H(f)) = 0.$$

Seien $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{D}_+(G/H)$ und $(g_i)_{i \in I} \subset \mathcal{D}_+(G)$ wie bei (1.2.6).

Dann gilt offenbar:

$$\sum_{i \in I} \overline{T}_H(g_i) = \sum_{i \in I} f_i \circ \pi_H = 1.$$

Es folgt daher:

$$M(S) = M\left(\sum_{i \in I} \overline{T}_H(g_i) \cdot S\right) \stackrel{d)}{=} M\left(\sum_{i \in I} g_i \cdot \widetilde{T}_H(S)\right) = 0, \text{ d.h.}$$

$S \in \text{Kern } M$.

zu "b) $\implies$ a)": Es gelte $\text{Kern } \widetilde{T}_H \subset \text{Kern } M$.

Wegen der Surjektivität von $\widetilde{T}_H$ läßt sich M folgendermaßen faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}'(G) & \xrightarrow{M} & \mathbb{C} \\ \widetilde{T}_H \downarrow & \nearrow & M_0 \\ \mathcal{E}'(G/H) & & \end{array} \quad (M_0 \in (\mathcal{E}'(G/H))^*)$$

Es gilt: $M_0 \in \text{LI}_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H))$, denn sei $b \in B \cup \{e\}$, $S \in \mathcal{E}'(G)$:

$$M_0(b_H(\widetilde{T}_H(S))) = M_0(b_H(\widetilde{T}_H(b_S))) = M(b_S) = M(S) = M_0(\widetilde{T}_H(S)).$$

(1.2.5)

Offenbar gilt: $\widetilde{T}_H^t(M_0) = M$.

Für diskretes H erhalten wir mittels (1.2.9) analog zu

Kap. 1, (2.18) und (2.21) :

(1.2.10) Satz

Sei H diskret, $B \subset G$.

Dann gilt:

$$\widetilde{T}_H^{LI}(\pi_H(B))(\mathcal{E}'(G/H)) = LI_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G)) \quad , d.h.$$

$$LI_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H)) \cong LI_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G)) \quad .$$

Beweis:

Sei $M \in LI_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G))$.

Wegen (1.2.8) genügt es, (1.2.9)c) nachzuweisen.

Sei $S \in \mathcal{E}'(G), g \in \mathcal{A}(G)$.

Für beliebiges $f \in \mathcal{A}(G)$ sei

$A(f) := \{y \in H \mid \text{supp } S \cap \text{supp } yf \neq \emptyset\}$. $A(f)$ ist endlich, denn
 $y \in A(f) \implies y \in (\text{supp } S)(\text{supp } f)^{-1} \cap H$.

Für jedes $f \in \mathcal{A}(G)$ gilt: $A(gf) \subset A(g)$.

Deshalb :

$$1) \quad \overline{T}_H(g) \bullet S = \sum_{y \in A(g)} y g \bullet S$$

$$2) \quad g \bullet \widetilde{T}_H(S) = \sum_{y \in A(g)} g \bullet y^{-1} S \quad , \text{ denn:}$$

zu 1): Sei $f \in \mathcal{A}(G)$, dann:

$$\overline{T}_H(g) \bullet S(f) = S\left(\left(\sum_{y \in H} g y^{-1}\right)f\right) = S\left(\sum_{y \in H} y g f\right)$$

(da H Normalteiler von G ist)

$$= S\left(\sum_{y \in H} y(g y^{-1} f)\right) = S\left(\sum_{y \in A(g)} y g f\right) = \left(\sum_{y \in A(g)} y g\right) \bullet S(f)$$

zu 2): Für $f \in \mathcal{A}(G)$ gilt:

$$g \bullet \widetilde{T}_H(S)(f) = \widetilde{T}_H(S)(gf) = S(\overline{T}_H(gf)) = S\left(\sum_{y \in H} y(gf)\right) \quad (\text{wie oben})$$

$$= S\left(\sum_{y \in A(g)} y(gf)\right) = \sum_{y \in A(g)} S(y(gf)) = \sum_{y \in A(g)} (y^{-1} S)(gf) =$$

$$= \sum_{y \in A(g)} (g \bullet y^{-1} S)(f) .$$

Wir erhalten:

$$M(\overline{T}_H(g) \bullet S) = M\left(\sum_{y \in A(g)} y g \bullet S\right) = \sum_{y \in A(g)} M(y g \bullet S) =$$

$$= \sum_{y \in A(g)} M(g \bullet y^{-1} S) = M\left(\sum_{y \in A(g)} g \bullet y^{-1} S\right) = M(g \bullet \widetilde{T}_H(S)) \quad .$$

(1.2.11) Bemerkung

Da stets $LI(\mathcal{E}'(G/H)) * \{0\}$ gilt. (siehe (1.1.27)b) ,
 enthält $\tilde{T}_H^t(LI(\mathcal{E}'(G/H)))$ offenbar immer ein LILF $\neq 0$ von $\mathcal{E}'(G)$.
 Man hat: $\tilde{T}_H^t(\tilde{\mu}_{G/H}) = \tilde{\mu}_G$, denn für $S \in \mathcal{E}'(G)$ gilt:
 $\tilde{T}_H^t(\tilde{\mu}_{G/H})(S) = \tilde{\mu}_{G/H}(\tilde{T}_H(S)) = \tilde{T}_H(S)(1) = S(1) = \tilde{\mu}_G(S)$.

Ist H diskreter Normalteiler von G , so kann man weiter
 folgenden Zusammenhang zwischen den Linksidealen $\mathcal{E}'(G)*S$
 und $\mathcal{E}'(G/H)*\tilde{T}_H(S)$ von $\mathcal{E}'(G)$ bzw. $\mathcal{E}'(G/H)$ ($S \in \mathcal{E}'(G)$) fest-
 stellen:

(1.2.12) Lemma

Sei H diskret, $B \subset G$, $S \in \mathcal{E}'(G)$. Es gilt:

$$\mathcal{E}'(G)*S \subset \Delta_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G)) \iff \mathcal{E}'(G/H)*\tilde{T}_H(S) \subset \Delta_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H)).$$

Beweis:

Offenbar gilt für beliebiges $B \subset G$ (vgl. S.II, (5)):

$$\Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \bigcap \{ \text{Kern } M \mid M \in LI_B(\mathcal{E}'(G)) \}$$

und

$$\Delta_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H)) = \bigcap \{ \text{Kern } M \mid M \in LI_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H)) \}.$$

Daher genügt es, für $B \subset G$ zu zeigen:

$$(*) \quad M | (\mathcal{E}'(G)*S) = 0 \text{ für alle } M \in LI_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G))$$

$$\iff M | (\mathcal{E}'(G/H)*\tilde{T}_H(S)) = 0 \text{ für alle } M \in LI_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H))$$

zu " $\implies$ ": Sei $M \in LI_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H))$. Nach (1.2.8) gilt:

$$M_0 := M \circ \tilde{T}_H \in LI_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G)).$$

Sei $S' \in \mathcal{E}'(G)$.

$$\text{Es folgt: } M(\tilde{T}_H(S')*\tilde{T}_H(S)) = M(\tilde{T}_H(S'*S)) = M_0(S'*S) = 0. \quad (1.2.4)$$

Da $\tilde{T}_H$ surjektiv ist, folgt hieraus die Behauptung.

zu " $\impliedby$ ": Sei $M \in LI_{B \cup H}(\mathcal{E}'(G))$.

Aus der Diskretheit von H folgt nach (1.2.10):

$$\text{Es gibt ein } M_1 \in LI_{\pi_H(B)}(\mathcal{E}'(G/H)) \text{ mit } M = M_1 \circ \tilde{T}_H.$$

Sei $S' \in \mathcal{E}'(G)$:

$$M(S'*S) = M_1(\tilde{T}_H(S'*S)) = M_1(\tilde{T}_H(S')*\tilde{T}_H(S)) = 0. \quad (1.2.4)$$

Wir kommen nun zu den Beziehungen zwischen $LI_F(\mathcal{E}'(G))$ und $LI_E(\mathcal{E}'(H))$, falls H eine offene Untergruppe von G (nicht notwendig Normalteiler von G) ist ($F \subset G$, $E \subset H$ geeignet).

Es gilt folgender Satz:

(1.2.13) Satz

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, H eine offene Untergruppe von G . Seien $E \subset H$, $F \subset G$ so, daß F ein vollständiges linkes Repräsentantensystem $R \subset G$ bzgl. H enthält und daß gilt:

$(E \cup F)R \subset R[E]^1$. Dann folgt:

$$LI_E(\mathcal{E}'(H)) \cong LI_{F \cup E}(\mathcal{E}'(G)).$$

Insbesondere gilt für $E := H$ und $F := G$:

$$LI(\mathcal{E}'(H)) \cong LI(\mathcal{E}'(G)).$$

Beweis:

Seien E, F, R nach Voraussetzung.

$\mathcal{A}(H)$ kann topologisch und algebraisch mit $\mathcal{A}(H \subset G) := \{f \in \mathcal{A}(G) \mid \text{supp } f \subset H\} \subset \mathcal{A}(G)$ identifiziert werden, da die Abbildung $\mathcal{A}(H) \longrightarrow \mathcal{A}(H \subset G)$, $f \longmapsto \tilde{f}$, $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ($x \in G$) gemäß Johnson [1], S. 98-100, ein topologischer Isomorphismus ist.

Für $S \in \mathcal{E}'(G)$ gilt mit dieser Identifikation:

$S|_{\mathcal{A}(H)} \in \mathcal{A}'(H)$; wegen $\text{supp } S|_{\mathcal{A}(H)} \subset \text{supp } S \cap H$ hat man:
 $S|_{\mathcal{A}(H)} \in \mathcal{E}'(H)$.

Da $\text{supp } S$ kompakt ist, folgt weiter:

$\text{supp } S \subset \bigcup_{i=1}^r x_i H$ für geeignete $x_1, \dots, x_r \in R$, $r \in \mathbb{N}^*$, d.h.

es gilt:

$$\{x \in R \mid x^{-1} S|_{\mathcal{A}(H)} \neq 0\} \subset \{x_1, \dots, x_r\}.$$

Daher ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\varphi: \mathcal{E}'(G) \longrightarrow \mathcal{E}'(H), \quad S \longmapsto \sum_{x \in R} x^{-1} S|_{\mathcal{A}(H)}$$

φ ist offenbar linear und besitzt folgende Eigenschaft:

$$1) \quad M(\varphi({}^b S)) = M(\varphi(S)) \quad \text{für alle } M \in LI_E(\mathcal{E}'(H)), b \in E \cup F, S \in \mathcal{E}'(G).$$

1) Es gilt stets: Ist R ein vollständiges linkes Repräsentantensystem bzgl. H , so gibt es ein $E \subset H$ mit $R^2 \subset R[E]$.

Ist G abelsch, so erfüllen $F := R$ und E die Bedingung $(E \cup F)R \subset R[E]$.

Nachweis von 1) :

Sei $b \in E \cup F$, $S \in \mathcal{E}'(G)$ mit $\text{supp } S \subset \bigcup_{i=1}^r x_i H$ mit geeigneten $x_1, \dots, x_r \in R$ wie oben.

Es folgt : $\text{supp } {}^b S \subset \bigcup_{i=1}^r b x_i H$ mit $b x_i \in (E \cup F) R \subset R[E]$ ($1 \leq i \leq r$),
weshalb es Elemente $c_1, \dots, c_r \in [E]$, $y_1, \dots, y_r \in R$ gibt mit:
 $b x_i = y_i c_i$ für $1 \leq i \leq r$.

Man erhält:

$$\begin{aligned} \varphi({}^b S) &= \sum_{i=1}^r y_i^{-1} ({}^b S) | \mathcal{A}(H) = \sum_{i=1}^r c_i (x_i^{-1} S) | \mathcal{A}(H) = \\ &= \sum_{i=1}^r c_i (x_i^{-1} S | \mathcal{A}(H)) . \end{aligned}$$

Für $M \in \text{LI}_E(\mathcal{E}'(H))$ ergibt sich deshalb wegen (1.1.26) :

$$\begin{aligned} M(\varphi({}^b S)) &= \sum_{i=1}^r M(c_i (x_i^{-1} S | \mathcal{A}(H))) = \sum_{i=1}^r M(x_i^{-1} S | \mathcal{A}(H)) = \\ &= M\left(\sum_{i=1}^r x_i^{-1} S | \mathcal{A}(H)\right) = M(\varphi(S)) . \end{aligned}$$

φ ist außerdem surjektiv; wir können folgende Rechtsinverse zu φ angeben:

Sei $\psi : \mathcal{E}'(H) \longrightarrow \mathcal{E}'(G)$ definiert durch:

Für $S \in \mathcal{E}'(H)$, $f \in \mathcal{A}(G)$ sei $\psi(S)(f) := S((a^{-1} f) \circ i_H)$, wobei $a \in H$ so, daß $\{a\} = H \cap R$, $i_H : H \hookrightarrow G$ kanonisch).

Aus Bruhat [1], 7., Prop. 9, folgt $\psi(S) \in \mathcal{D}'(G)$;

wegen $\text{supp } \psi(S) \subset \text{supp } {}^a S$ gilt $\psi(S) \in \mathcal{E}'(G)$ (für $S \in \mathcal{E}'(H)$).

Daß ψ linear ist, folgt aus der Definition von ψ .

ψ ist rechtsinvers zu φ :

Sei $S \in \mathcal{E}'(H)$, $f \in \mathcal{A}(H)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(S)(f) &= \varphi(\psi(S))(f) = \sum_{x \in R} x^{-1} (\psi(S))(\tilde{f})^* = \\ &= \sum_{x \in R} \psi(S)(x \tilde{f}) = \sum_{x \in R} S((a^{-1} x \tilde{f}) \circ i_H) = S(e \tilde{f} \circ i_H) = S(f), \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{E}'(H)} .$$

Aus der Surjektivität von φ folgt, daß die Transponierte $\varphi^t : (\mathcal{E}'(H))^* \longrightarrow (\mathcal{E}'(G))^*$ von φ injektiv ist.

Wir zeigen nun, daß $\varphi^t(\text{LI}_E(\mathcal{E}'(H))) \subset \text{LI}_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))$:

Sei dazu $M \in \text{LI}_E(\mathcal{E}'(H))$, $b \in E \cup F$, $S \in \mathcal{E}'(G)$.

Aus der Eigenschaft 1) von φ erhält man:

$$\varphi^t(M)({}^b S) = M(\varphi({}^b S)) = M(\varphi(S)) = \varphi^t(M)(S), \text{ d.h.}$$

$$\varphi^t(M) \in \text{LI}_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G)) .$$

*) $\tilde{f}$ wie auf S.66

Es gilt sogar: $\varphi^t(LI_E(\mathcal{E}'(H))) = LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))$, denn die Transponierte φ^t von φ induziert eine Abbildung von $LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))$ in $LI_E(\mathcal{E}'(H))$, so daß $(\varphi^t \circ \varphi^t) \big|_{LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))} = \text{id}_{LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))}$:

Sei $M \in LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))$, $b \in E, s \in \mathcal{E}'(H)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(b_s) &= \text{ada}^{-1}(\varphi(s)), \text{ denn } f \in \mathcal{Q}(G) \implies \\ \implies \varphi(b_s)(f) &= b_s((a^{-1}f) \circ i_H) = s((a^{-1}f) \circ i_H) = \\ &= s(a^{-1}((ab^{-1}a^{-1}f) \circ i_H)) = \varphi(s)(ab^{-1}a^{-1}f) = \text{aba}^{-1}(\varphi(s))(f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{daher: } \varphi^t(M)(b_s) &= M(\varphi(b_s)) = M(\text{aba}^{-1}(\varphi(s))) = M(\varphi(s)) = \\ &= \varphi^t(M)(s), \text{ d.h. } \varphi^t(M) \in LI_E(\mathcal{E}'(H)). \end{aligned}$$

Sei nun $S_0 \in \mathcal{E}'(G)$, $x_1, \dots, x_r \in R$ seien wieder so gewählt, daß $\text{supp } S_0 \subset \bigcup_{i=1}^r x_i H$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} (\varphi^t \circ \varphi^t)(M)(S_0) &= \varphi^t(M)(\varphi(S_0)) = M(\varphi(\varphi(S_0))) = \\ &= M(\varphi(\sum_{i=1}^r (x_i^{-1} S_0) | \mathcal{Q}(H))) = \sum_{i=1}^r M(\varphi(x_i^{-1} S_0) | \mathcal{Q}(H)) = \\ &= \sum_{i=1}^r M(a \chi_H \cdot (x_i^{-1} S_0)) \quad (\text{denn wegen } \mathcal{Q}(H) = \mathcal{Q}(H \subset G) \text{ gilt für} \\ &\quad f \in \mathcal{Q}(G), s \in \mathcal{Q}'(G) : \varphi(s | \mathcal{Q}(H))(f) = \\ &\quad = s(\chi_H \cdot (a^{-1}f)) = a(\chi_H \cdot s)(f) \\ &\quad \text{mit } \chi_H \in \mathcal{E}(G), \text{ da } H \text{ offen}) \\ &= \sum_{i=1}^r M(x_i(\chi_H \cdot (x_i^{-1} S_0))) = \sum_{i=1}^r M(\chi_{x_i H} \cdot S_0) = \\ &= M(\sum_{i=1}^r \chi_{x_i H} \cdot S_0) = M(S_0). \end{aligned}$$

$$\text{Demnach: } (\varphi^t \circ \varphi^t) LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G)) = \text{id}_{LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))}.$$

Wir haben deshalb insgesamt:

φ^t induziert einen Isomorphismus von $LI_E(\mathcal{E}'(H))$ auf $LI_{E \cup F}(\mathcal{E}'(G))$.

Johnson erwähnt in Johnson [2], 2., Prop. 1, 2, 3, daß für $\mathcal{Q}(G)$ zu (1.2.8) - (1.2.13) analoge Aussagen (für den speziellen Fall $B := G$ bzw. $E := H$, $F := G$) gelten. Wir wollen nun für be-

liebigen $B \subset G$, $E \subset H, F \subset G$ (E und F mögen jedoch die Bedingungen von (1.2.13) erfüllen) die entsprechenden Aussagen angeben, ohne Beweise, da diese völlig analog zu denen von (1.2.8) - (1.2.13) bzw. der Vererbungssätze für $\mathcal{K}(G)$ (vgl. Kap.1 und Roelcke et al. [1]) verlaufen.

(1.2.14) Satz

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von $G, B \subset G$.

Dann gilt:

$LI_{\pi_H(B)}(\mathcal{A}(G/H))$ ist isomorph zu einem linearen Teilraum von $LI_{B \cup H}(\mathcal{A}(G))$.

(1.2.15) Satz

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, H ein diskreter Normalteiler von $G, B \subset G$.

Dann gilt:

$LI_{\pi_H(B)}(\mathcal{A}(G/H)) \cong LI_{B \cup H}(\mathcal{A}(G))$.

(1.2.16) Satz

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, H eine offene Untergruppe von G . Sei $E \subset H, F \subset G$ so, daß F ein vollständiges linkes Repräsentantensystem $R \subset G$ bzgl. H enthält und daß gilt:

$(E \cup F)R \subset R[E]$. Dann folgt:

$LI_E(\mathcal{A}(H)) \cong LI_{E \cup F}(\mathcal{A}(G))$.

Insbesondere gilt für $E := H$ und $F := G$:

$$LI(\mathcal{A}(H)) \cong LI(\mathcal{A}(G))$$

Abschließend sollen nun noch Vererbungseigenschaften für $LI_E(\mathcal{A}'(G))$ und $LI_E(\mathcal{E}(G))$ beim Übergang zu offenen Untergruppen H untersucht werden: allerdings nur für $E \subset H$; ob $LI_E(\mathcal{A}'(G))$ für allgemeineres $E \subset G$ in Beziehung zu $LI_E(\mathcal{A}'(H))$ für geeignetes $E' \subset H$ gebracht werden kann, ist offen (entsprechend für $\mathcal{E}(G)$ und $\mathcal{E}(H)$)¹⁾.

1) Im Gegensatz zu (1.2.13) gilt i.a. nicht: $LI(\mathcal{A}'(G)) \cong LI(\mathcal{A}'(H))$ bzw. $LI(\mathcal{E}(G)) \cong LI(\mathcal{E}(H))$ für offene Untergruppen H von G : Für $G := \mathbb{Z}$, $H := \{0\}$ gilt: $\dim LI(\mathcal{A}'(G)) = 0 = \dim LI(\mathcal{E}(G))$ (vgl. (4.2.10)), während $\dim LI(\mathcal{A}'(H)) = \dim LI(\mathcal{E}(H)) = 1$ (wegen $\mathcal{A}'(H) = \mathcal{E}(H) = \mathcal{K}(H)$).

Zunächst zu $\mathcal{D}'(G)$:

Da die Abbildung $\mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{D}(H \subset G)$, $f \mapsto \tilde{f}$ (vgl. Beweis zu (1.2.13)) ein topologischer Isomorphismus ist, ist

$$(1.2.17) \quad \mathcal{V} : \mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathcal{D}'(H), \quad S \mapsto \mathcal{V}(S), \quad \text{mit} \\ \mathcal{V}(S)(f) := S(\tilde{f}) \text{ für } S \in \mathcal{D}'(G), f \in \mathcal{D}(H)$$

ein Epimorphismus; $\mathcal{V}$ hat folgende Eigenschaft:

$$(1.2.18) \quad \mathcal{V}(b_S) = b(\mathcal{V}(S)) \text{ für alle } b \in H \text{ und } S \in \mathcal{D}'(G), \text{ denn:} \\ S \in \mathcal{D}'(G), b \in H, f \in \mathcal{D}(H) \implies \mathcal{V}(b_S)(f) = b_S(\tilde{f}) = \\ = S(b^{-1}\tilde{f}) = S((b^{-1}f)^\sim) = \\ = \mathcal{V}(S)(b^{-1}f) = b\mathcal{V}(S)(f)$$

Wir erhalten :

(1.2.19) Satz

Sei H eine offene Untergruppe von G , $E \subset H$.

Dann gilt:

Die Transponierte $\mathcal{V}^t : (\mathcal{D}'(H))^* \rightarrow (\mathcal{D}'(G))^*$ der Abbildung $\mathcal{V}$ induziert einen Monomorphismus von $LI_E(\mathcal{D}'(H))$ in $LI_E(\mathcal{D}'(G))$.

Beweis: o.B.d.A. kann $e \in E$ angenommen werden, d.h. $E \neq \emptyset$.

Da $\mathcal{V}$ surjektiv ist, ist $\mathcal{V}^t$ injektiv.

Sei $M \in LI_E(\mathcal{D}'(H))$, $b \in E, S \in \mathcal{D}'(G)$.

Wegen

$$\mathcal{V}^t(M)(b_S) = M(\mathcal{V}(b_S)) = M(b(\mathcal{V}(S))) = M(\mathcal{V}(S)) = \mathcal{V}^t(M)(S) \quad (1.2.18)$$

folgt: $\mathcal{V}^t(M) \in LI_E(\mathcal{D}'(G))$.

Aus (1.2.19) folgt, daß für $E \subset H$, falls H offene Untergruppe von G ist, $\dim LI_E(\mathcal{D}'(H)) \leq \dim LI_E(\mathcal{D}'(G))$. Ist E endlich und $\dim LI_E(\mathcal{D}'(H)) = 0$, so gilt dasselbe für $\dim LI_E(\mathcal{D}'(G))$, d.h. in diesem Fall stimmen die Dimensionen von $LI_E(\mathcal{D}'(G))$ und $LI_E(\mathcal{D}'(H))$ überein:

(1.2.20) Satz

Sei H eine offene Untergruppe von G , $E \subset H$ endlich.

Dann folgt aus $LI_E(\mathcal{Q}'(H)) = \{0\}$ $LI_E(\mathcal{Q}'(G)) = \{0\}$.

Beweis: o.B.d.A. : $E \neq \emptyset$.

Sei $E = \{b_1, \dots, b_r\}$ für geeignete $b_1, \dots, b_r \in H$.

Wir zeigen :

$$\Delta_E(\mathcal{Q}'(G)) = \mathcal{Q}'(G).$$

Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem bzgl. der Relation

$$x \sim^H y : \iff Hx = Hy \quad (x, y \in G).$$

Sei $s \in \mathcal{Q}'(G)$, $i \in I$.

Durch $S_i : \mathcal{Q}(H) \longrightarrow \mathbb{C}$, $S_i(f) := S(\tilde{f}^{x_i})$ ($\tilde{f}$ wie im Beweis von (1.2.13))

ist ein Element $S_i \in \mathcal{Q}'(H)$ definiert.

Aus $LI_E(\mathcal{Q}'(H)) = \{0\}$ ($\iff \Delta_E(\mathcal{Q}'(H)) = \mathcal{Q}'(H)$) folgt:

$$S_i = \sum_{\nu=1}^r (T_{i,\nu} - b_\nu T_{i,\nu}) \quad \text{für geeignete } T_{i,1}, \dots, T_{i,r} \in \mathcal{Q}'(H).$$

Sei nun $\nu \in \{1, \dots, r\}$.

Da $\mathcal{Q}(G)$ topologische direkte Summe der Räume $\mathcal{Q}(Hx_i \subset G) := \{f \in \mathcal{Q}(G) \mid \text{supp } f \subset Hx_i\}$ ist (Johnson [1], (I.3.3)) wird durch die Definition

$T_\nu(f) := T_{i,\nu}(f^{x_i^{-1}}|_H)$ für $f \in \mathcal{Q}(Hx_i \subset G)$ ($i \in I$) ein Element $T_\nu \in \mathcal{Q}'(G)$ bestimmt.

Es gilt : $\sum_{\nu=1}^r (T_\nu - b_\nu T_\nu) = S$, denn

sei $f \in \mathcal{Q}(Hx_i \subset G)$ ($i \in I$), so folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^r (T_\nu(f) - b_\nu T_\nu(f)) &= \sum_{\nu=1}^r (T_\nu(f) - T_\nu(b_\nu^{-1} f)) = \\ &= \sum_{\nu=1}^r (T_{i,\nu}(f^{x_i^{-1}}|_H) - T_{i,\nu}((b_\nu^{-1} f)^{x_i^{-1}}|_H)) = \\ &= \sum_{\nu=1}^r (T_{i,\nu}(f^{x_i^{-1}}|_H) - T_{i,\nu}(b_\nu^{-1} (f^{x_i^{-1}}|_H))) = \\ &= \sum_{\nu=1}^r (T_{i,\nu}(f^{x_i^{-1}}|_H) - b_\nu T_{i,\nu}(f^{x_i^{-1}}|_H)) = S_i(f^{x_i^{-1}}|_H) = \\ &= S((f^{x_i^{-1}}|_H)^{\sim} x_i) = S(f). \end{aligned}$$

Nun zu $\mathcal{E}(G)$: Die Abbildung

$$(1.2.21) \quad \kappa: \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(H), f \mapsto f|_H$$

stellt für eine offene Untergruppe H von G einen Epimorphismus dar mit

$$(1.2.22) \quad \kappa(bf) = b(\kappa(f)) \quad \text{für alle } b \in H \text{ und } f \in \mathcal{E}(G).$$

Wie bei (1.2.19) zeigt man nun, daß gilt:

(1.2.23) Satz

Sei H eine offene Untergruppe von $G, E \subset H$.

Dann induziert die Transponierte $\kappa^t: (\mathcal{E}(H))^* \rightarrow (\mathcal{E}(G))^*$ der Abbildung κ einen Monomorphismus von $LI_E(\mathcal{E}(H))$ in $LI_E(\mathcal{E}(G))$.

Analog zu (1.2.20) gilt:

(1.2.24) Satz

Sei H eine offene Untergruppe von $G, E \subset H$ endlich.

Dann folgt aus $LI_E(\mathcal{E}(H)) = \{0\}$: $LI_E(\mathcal{E}(G)) = \{0\}$.

Beweis: Völlig analog zum Beweis von (1.2.20):

Man zeigt hier, daß $\Delta_E(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G)$; für $f \in \mathcal{E}(G)$ setze man jetzt $f_i := f x_i^{-1} |_{H \in \mathcal{E}(H)}$ ($i \in I$), benutze entsprechend

$$\Delta_E(\mathcal{E}(H)) = \mathcal{E}(H). \text{ Man beachte weiter, daß wegen } G = \bigcup_{i \in I} Hx_i$$

(disjunkte Vereinigung) und Hx_i offen für alle $i \in I$ für jede Familie $(g_i)_{i \in I} \subset \mathcal{E}(H)$ durch $g(x) := g_i(xx_i^{-1})$ für $x \in Hx_i$ ein Element $g \in \mathcal{E}(G)$ definiert wird.

§2 Die Algebren $\mathcal{A}_p(S)$

In Meisters/Kregelius Petersen [1] und Kregelius/Petersen [1] wird gezeigt, daß die Frage, für welche $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$

$LI_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R})) = \mathbb{C}\tilde{\mu}_{\mathbb{R}}^{(1)}$ gilt,

äquivalent zu dem Problem ist, wann der Ring

$$\mathcal{A}_p(\mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph, } \exists_{C, b > 0} \forall_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \leq C e^{b|z|^p} \right\}$$

$$\text{mit } p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+, z \mapsto |\operatorname{Im} z| + \log(1 + |z|)$$

$$= \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R})) \quad (\tilde{\mathcal{F}} \text{ bezeichne die Fourier-Transformation auf } \mathcal{E}'(\mathbb{R}))$$

von gewissen Elementen $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}_p(\mathbb{C})$ erzeugt wird.

Wir betrachten statt $\mathbb{R}$ die Torusgruppe T , auf die man gemäß (1.2.10) und wegen $T \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ das LILF - Problem auf

$\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ reduzieren kann, und definieren²⁾ auf $\mathcal{D}'(T)$ die Fourier-Transformation $\tilde{\mathcal{F}}$ durch $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{D}'(T) \rightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{Z})$ mit

$$\mathcal{A}_p(\mathbb{Z}) := \left\{ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists_{C, b > 0} \forall_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)| \leq C e^{b|k|^p} \right\} \text{ und}$$

$$p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, k \mapsto \log(1 + |k|),$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(S)(k) := S(e_{-k}) \quad \text{für } S \in \mathcal{D}'(T), k \in \mathbb{Z}, \text{ wobei } e_k \in \mathcal{D}(T)$$

definiert sei durch : $e_k(x) := [x, k] \quad (k \in \mathbb{Z}, x \in T)$

(siehe (0.10)). $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z})$ ist bzgl. der argumentweisen Addition, Multiplikation und skalaren Multiplikation mit Elementen von $\mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$ -Algebra; bzgl. dieser Operationen auf $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z})$ und der in (1.1.22) genannten auf $\mathcal{D}'(T) = \mathcal{E}'(T)$ ist $\tilde{\mathcal{F}}$ ein $\mathbb{C}$ -Algebren-Isomorphismus.

Es gilt: $\tilde{\mathcal{F}}(\operatorname{Kern} \tilde{\mu}_T^{(1)}) = \{ f \in \mathcal{A}_p(\mathbb{Z}) \mid f(0) = 0 \} =: \mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Es wird sich zeigen, daß ähnlich wie im Fall $G = \mathbb{R}$ gilt:

$LI_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}'(T)) = \mathbb{C}\tilde{\mu}_T \iff$ das von gewissen Elementen $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ erzeugte Ideal von $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ stimmt mit $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ überein.

Die Tatsache, daß man durch den Übergang zu T nur noch zu untersuchen hat, wann der Folgenring $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ von gewissen Elementen $f_1, \dots, f_r$ erzeugt wird, stellt offenbar eine wesentliche Vereinfachung dar.

1) Zur Definition von $\tilde{\mu}_{\mathbb{R}}$ und $\tilde{\mu}_T$ vgl. (1.1.27)b).

2) siehe Schwartz [1], Chap. VII, §1.

3) Die Elemente von $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z})$ werden auch als langsam wachsende Folgen bezeichnet. $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z})$ kann mit $(\mathcal{Y}(\mathbb{Z}))'$ identifiziert werden, wenn $\mathcal{Y}(\mathbb{Z})$ den Raum der schnell fallenden Folgen bezeichnet.

Für den Teilraum $A_1'(T)$ von $\mathcal{D}'(T)$ (siehe (0.9))¹⁾ erhält man:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}(A_1'(T)) &= L_\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists_{C>0} \forall_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)| \leq C \right\} \\ &=: \mathcal{A}_0(\mathbb{Z})\end{aligned}$$

und

$$\text{Kern } \tilde{\mu}_T|_{A_1'(T)} = \{ f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{Z}) \mid f(0) = 0 \} =: \mathcal{A}_0(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) .$$

Auch hier läßt sich feststellen, daß für $a_1, \dots, a_r \in T$ gilt:

$\text{LI}_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1'(T)) = \langle \tilde{\mu}_T|_{A_1'(T)} \rangle$ genau dann, wenn gewisse $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}_0(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ den Ring $\mathcal{A}_0(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ erzeugen.

Diese Beispiele motivieren zunächst für den Fall einer kompakten abelschen Gruppe G die Definition der $\mathbb{C}$ -Algebren $\mathcal{A}_p(S)$ (mit $p : \hat{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $S \subset \hat{G}$) und die Beschaffung von Kriterien, wann eine Teilmenge Y von $\mathcal{A}_p(S)$ $\mathcal{A}_p(S)$ erzeugt.

Die Definition der $\mathbb{C}$ -Algebren $\mathcal{A}_p(S)$ läßt sich jedoch weit allgemeiner fassen; da durch diese allgemeine Definition auch Bilder von gewissen Distributionenräumen unter der Fouriertransformation für beliebige kompakte Gruppen erfaßt werden, werden wir diese im folgenden angeben.

1) Da $\mathcal{D}(T)$ ein dichter Teilraum von $A_1(T)$ ist und $A_1(T)$ auf $\mathcal{D}(T)$ eine gröbere Topologie als die übliche induziert, kann $A_1'(T)$ mit einem linearen Teilraum von $\mathcal{D}'(T)$ identifiziert werden.

2.1 Definition und allgemeine Eigenschaften der Algebren $\mathcal{A}_p(S)$

Im folgenden sei

(2.1.1) Σ eine Indexmenge, jedem $\sigma \in \Sigma$ sei ein endlich-dimensionaler Hilbertraum H_σ zugeordnet.

Wir definieren

(2.1.2) Definition

Seien Σ und $(H_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ wie in (2.1.1), $p: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, $S \subset \Sigma$.

$$\mathcal{A}_p(S) := \left\{ f \in \prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma) \mid \exists_{C, b > 0} \forall_{\sigma \in \Sigma} \|f(\sigma)\|_{B(H_\sigma)} \leq C e^{b p(\sigma)}, f|_S = 0 \right\}$$

(dabei sei $\|\cdot\|_\sigma: B(H_\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\|f_\sigma\|_\sigma := \sup_{\|y\|_\sigma = 1} \|f_\sigma(y)\|_\sigma$ ($\|\cdot\|_\sigma$ sei die zu H_σ gehörige Norm), $f_\sigma \in B(H_\sigma)$)).

(2.1.3) Bemerkung

$\Sigma, (H_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ wie in (2.1.1), $S \subset \Sigma, p: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Dann gilt offenbar:

$\mathcal{A}_p(S)$ ist eine $\mathbb{C}$ -Algebra bzgl. der komponentenweisen Addition, Multiplikation (= Komposition) und skalaren Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{C}^{(2)}$. $\mathcal{A}_p(S)$ besitzt folgendes Einselement f_S :

$$f_S = (f_S(\sigma))_{\sigma \in \Sigma} \text{ mit } f_S(\sigma) := \begin{cases} \text{id} & \text{falls } \sigma \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{A}_p(S)$ ist ein Ideal von $\mathcal{A}_p(\Sigma)$.

(2.1.4) Beispiele

a) Sei G eine kompakte Gruppe, Σ das duale Objekt zu G (siehe (0.7)); zu jedem $\sigma \in \Sigma$ sei ein $U^{(\sigma)} \in G$ gewählt, H_σ sei der zu $U^{(\sigma)}$ gehörige Darstellungsraum. Für jedes $S \subset \Sigma$ und $p: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ stellt dann $\mathcal{A}_p(S)$ eine Unteralgebra von $\mathcal{E}(\Sigma)$ dar.

1) für $f \in \prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma)$, $S \subset \Sigma$ sei $f|_S \in \prod_{\sigma \in S} B(H_\sigma)$ mit $f|_S(\sigma) := f(\sigma)$ für $\sigma \in S$.

2) bzw. Unteralgebra von $\prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma)$.

b) Sei G eine kompakte abelsche Gruppe. Dann sind die Darstellungsräume der irreduziblen stetigen unitären Darstellungen eindimensional, können also mit $\mathbb{C}$ identifiziert werden. Daher besteht jede Äquivalenzklasse $\sigma \in \Sigma$ nur aus einem Element $\chi^{(\sigma)}$; Σ kann als Menge aller stetigen Charaktere von G aufgefaßt werden, d.h. $\Sigma = \hat{G}$. Für $S \subset \hat{G}$ und $p : \hat{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ hat man:

$$\mathcal{A}_p(S) = \left\{ f : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists_{c,b>0} \forall_{\xi \in \hat{G}} |f(\xi)| \leq c e^{b p(\xi)} \right\},$$

$\mathcal{A}_p(S)$ ist dann eine kommutative $\mathbb{C}$ -Algebra mit dem Einselement f_S mit $f_S(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Projektive Limiten von Algebren $\mathcal{A}_p(S)$

Seien $\Sigma, (H_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ wie in (2.1.1). Weiter sei $(A, \leq)$ eine gerichtete Menge, $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Teilmengen von Σ , sodaß:

$$(2.1.5) \quad \Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in A \text{ mit } \alpha \leq \beta, \quad \Sigma = \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha.$$

Für jedes $\alpha \in A$ sei weiter $p_\alpha : \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $S_\alpha \subset \Sigma_\alpha$ vorgegeben mit:

$$(2.1.6) \quad S_\alpha = S_\beta \cap \Sigma_\alpha \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in A \text{ mit } \alpha \leq \beta$$

und

$$(2.1.7) \quad \alpha, \beta \in A, \quad \alpha \leq \beta, \quad f = (f(\sigma))_{\sigma \in \Sigma_\beta} \in \mathcal{A}_{p_\beta}(\Sigma_\beta),$$

so folgt:

$$f|_{\Sigma_\alpha} = (f(\sigma))_{\sigma \in \Sigma_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(\Sigma_\alpha), \text{ d.h. wegen (2.1.6) gilt } f|_{\Sigma_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha) \text{ falls } f \in \mathcal{A}_{p_\beta}(S_\beta).$$

Dann ist das System $(\mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha), T_{\alpha\beta} (\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$, mit $T_{\alpha\beta} : \mathcal{A}_{p_\beta}(S_\beta) \rightarrow \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha)$, $f \mapsto f|_{\Sigma_\alpha}$ für $\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta$,

projektiv, d.h. für $\alpha, \beta, \gamma \in A, \alpha \leq \beta \leq \gamma$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A}_{p_\gamma}(S_\gamma) & \\ T_{\beta\gamma} \swarrow & & \searrow T_{\alpha\gamma} \\ \mathcal{A}_{p_\beta}(S_\beta) & \xrightarrow{T_{\alpha\beta}} & \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha) \end{array}$$

Speziell gilt offenbar : Sei $\tilde{S}_\alpha := \sum_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.
Dann erfüllt $(\tilde{S}_\alpha)_{\alpha \in A}$ (2.1.6) .

(2.1.8) Beispiel

Sei G eine kompakte Gruppe . Dann gilt gemäß (1.1.3) :
 $G = \text{proj lim } (A, G/H_\alpha, \text{pr}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$, wobei A
eine geeignete gerichtete Indexmenge ist , $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine
Familie von Untergruppen von G ist mit G/H_α LIE-Gruppe für
alle $\alpha \in A$, $H_\beta \subset H_\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \leq \beta$ und
 $\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha = \{e\}$, und $\text{pr}_{\alpha\beta} : G/H_\beta \rightarrow G/H_\alpha$ die kanonische
Projektion sei (für $\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta$) .
Weiter sei $\text{pr}_\alpha : G \rightarrow G/H_\alpha$ für $\alpha \in A$ die Quotienten-
abbildung . Es gilt für $\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta$: $\text{pr}_\alpha = \text{pr}_{\alpha\beta} \circ \text{pr}_\beta$.

Σ sei das duale Objekt von G .

Für $\alpha \in A$ sei $\Sigma_\alpha := A(\Sigma, H_\alpha)$.

Dann erfüllt $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$ (2.1.5) , denn :

Seien $\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta$, so folgt aus $H_\beta \subset H_\alpha$: $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$

Sei $P := \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$.

Zunächst gilt : $A(G, P) = \{e\}$, denn sei $x \in A(G, P)$, dann :

$U_x^{(\zeta)} = \text{id}$ für alle $U^{(\zeta)} \in \zeta, \zeta \in \Sigma_\alpha, \alpha \in A$.

Wegen Hewitt/Ross [2] , (28.10) und Hewitt/Ross [1] , (22.12)

erhält man für alle $\alpha \in A$: $\pi_{H_\alpha}(x) = e$, d.h.

$x \in \bigcap_{\alpha \in A} \text{Kern } \pi_{H_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha = \{e\}$.

Hieraus ergibt sich nun :

$\Sigma = A(\Sigma, A(G, \Sigma)) = A(\Sigma, \{e\}) = A(\Sigma, A(G, P)) = [P]$

(siehe Hewitt/Ross [2] , (28.9) , $[P]$ wie in (0.7)) ;

da jedoch für jedes $\alpha \in A$ gilt : $\Sigma_\alpha = [\Sigma_\alpha]$

(siehe Hewitt/Ross [2] , (28.9)i))

und A gerichtet ist , hat man auch : $P = [P]$.

Definiert man für $\alpha \in A$ $S_\alpha := \Sigma_\alpha \setminus \{\zeta_0\}$, so gilt offenbar
(2.1.6) für $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Sei nun G abelsch .

Da die Gruppenhomomorphismen $\text{pr}_{\alpha\beta}$, pr_α ($\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta$) sur-
jektiv sind, sind die folgenden Homomorphismen injektiv:

Seien $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$:

$$i_{\beta\alpha} : (G/H_\alpha)^\wedge \longrightarrow (G/H_\beta)^\wedge, \quad \xi \longmapsto \xi \circ \text{pr}_{\alpha\beta}$$

$$i_\alpha : (G/H_\alpha)^\wedge \longrightarrow \hat{G}, \quad \xi \longmapsto \xi \circ \text{pr}_\alpha \quad .$$

Identifizieren wir nun $\hat{G}$ mit Σ , so gilt für alle $\alpha \in A$:

$$\Sigma_\alpha = H_\alpha^\perp = i_\alpha((G/H_\alpha)^\wedge) \text{ bzw. } S_\alpha = H_\alpha^\perp \setminus \{0\} = i_\alpha((G/H_\alpha)^\wedge \setminus \{0\})$$

(wobei wir mit 0 das Einselement von $\hat{G}$ bzw. von $(G/H_\alpha)^\wedge$ bezeichnen).

Sei $\alpha \in A$. Da G/H_α eine kompakte abelsche LIE-Gruppe ist, gilt:
 $G/H_\alpha \cong T^{n_\alpha} \times F_\alpha$, wobei $n_\alpha \in \mathbb{N}$, F_α eine endliche abelsche Gruppe ist (siehe Sagle/Walde [1], Theorem 6.20, Prop. 4.14 und Hewitt/Ross [1], (24.45)).

Wir können daher die Dualgruppe $(G/H_\alpha)^\wedge$ von G/H_α mit $\mathbb{Z}^{n_\alpha} \times F_\alpha$ identifizieren.

Aus den vorangehenden allgemeinen Überlegungen für beliebiges kompaktes G ergibt sich nun:

$$\hat{G} = \bigcup_{\alpha \in A} i_\alpha(\mathbb{Z}^{n_\alpha} \times F_\alpha) \quad .$$

Seien Σ , $(H_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ wieder wie im allgemeinen Teil vor (2.1.8). Gemäß folgendem Satz kann der projektive Limes des projektiven Systems

$(A, \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha), T_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta))$
 mit einer Unterálgebra von $\prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma)$ identifiziert werden:

(2.1.9) Satz

Sei $S := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$, $P := (p_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Dann gilt:

$$\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha = \Sigma_\alpha \cap S$$

$$\text{und} \quad : \quad \mathcal{A}_P(S) := \left\{ f \in \prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma) \mid \begin{array}{l} \forall_{\alpha \in A} f|_{\Sigma_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha) \\ \text{bzw. } \forall_{\sigma \in \Sigma} f|_{S_\sigma} \in \mathcal{A}_{p_\sigma}(\Sigma_\sigma) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ f \in \prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma) \mid \begin{array}{l} \forall_{\alpha \in A} f|_{\Sigma_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha) \\ f|_S = 0 \end{array} \right\}$$

ist eine Unterálgebra von $\prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma)$ und projektiver Limes

des Systems $(A, \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha), T_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta))$

mit den Projektionen $T_\alpha : \mathcal{A}_P(S) \longrightarrow \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha), f \mapsto f|_{\Sigma_\alpha} \ (\alpha \in A)$.

$\mathcal{A}_P(S)$ besitzt das Einselement f_S mit $f_S(\sigma) := \begin{cases} \text{id} & \text{für } \sigma \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Beweis:

Sei $\alpha \in A$.

$S_\alpha \subset S \cap \Sigma_\alpha$ gilt trivialerweise; sei $\sigma \in S \cap \Sigma_\alpha$. Dann folgt: Es gibt ein $\beta \in A$ mit $\sigma \in S_\beta$. Da A gerichtet ist, kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\alpha \leq \beta$. Wegen $S_\beta \cap \Sigma_\alpha = S_\alpha$ folgt die Behauptung.

Sei nun $f \in \prod_{\alpha \in A} B(H_\sigma)$. Dann:

$$\bigvee_{\alpha \in A} f|_{S_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha) \iff \bigvee_{\alpha \in A} f|_{S_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(\Sigma_\alpha), f|_{[S]=0}$$

" $\implies$ ": Wegen $\mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha) \subset \mathcal{A}_{p_\alpha}(\Sigma_\alpha)$ ($\alpha \in A$) ist nur $f|_{[S]=0}$ nachzuweisen.

Sei $\sigma \in [S]$. Dann gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\sigma \in \Sigma_\alpha \cap [S \subset \Sigma_\alpha \setminus S_\alpha]$.

Daher: $f(\sigma) = 0$.

" $\impliedby$ ": Sei $\alpha \in A$, $\sigma \in S_\alpha$. Wegen $S_\alpha \subset S$ folgt $f(\sigma) = 0$.

$\mathcal{A}_p(S)$ wird daher durch beide im Satz genannten Mengen definiert.

Da alle $\mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha)$ ($\alpha \in A$) $\mathbb{C}$ -Algebren sind, ist offenbar $\mathcal{A}_p(S)$ eine $\mathbb{C}$ -Algebra. Die Abbildungen T_α ($\alpha \in A$) sind $\mathbb{C}$ -Algebren-Homomorphismen mit $T_\alpha = T_{\alpha\beta} \circ T_\beta$ für $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$. Wir zeigen nun, daß $\mathcal{A}_p(S)$ projektiver Limes des Systems $(A, \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha), T_{\alpha\beta} \text{ } (\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$ (in der Kategorie der $\mathbb{C}$ -Algebren) ist.

Sei dazu $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$ -Algebra, $(\tilde{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von $\mathbb{C}$ -Algebra-Homomorphismen $\tilde{T}_\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha)$ ($\alpha \in A$), sodaß für alle $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{p_\beta}(S_\beta) & \xrightarrow{T_{\alpha\beta}} & \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha) \\ \tilde{T}_\beta \swarrow & \mathcal{A} & \searrow \tilde{T}_\alpha \end{array}$$

Sei nun $\tilde{T}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_p(S)$ folgendermaßen definiert:

Sei $y \in \mathcal{A}$, $\sigma \in \Sigma$.

$\tilde{T}(y)(\sigma) := \tilde{T}_\alpha(y)(\sigma)$ falls $\sigma \in \Sigma_\alpha$ ($\alpha \in A$).

$\tilde{T}$ ist wohldefiniert, denn für $\sigma \in \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ ($\alpha, \beta \in A$), $y \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\text{Sei } \gamma \in A \text{ mit } \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma, \text{ dann } \tilde{T}_\gamma(y)(\sigma) = \begin{cases} \tilde{T}_\alpha(y)(\sigma) \\ \tilde{T}_\beta(y)(\sigma) \end{cases}$$

und damit $\tilde{T}_\alpha(y)(\sigma) = \tilde{T}_\beta(y)(\sigma)$. Für $\alpha \in A$ gilt offenbar:

$y \in \mathcal{A} \implies \tilde{T}(y)|_{\Sigma_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha)$. Insgesamt hat man also:

$y \in \mathcal{A} \implies \tilde{T}(y) \in \mathcal{A}_p(S)$.

Da alle $\tilde{T}_\alpha$ ($\alpha \in A$) $\mathbb{C}$ -Algebren-Homomorphismen sind, ist auch $\tilde{T}$ ein $\mathbb{C}$ -Algebra-Homomorphismus.

Sei $\alpha \in A$, $y \in \tilde{A}$, $\phi \in \Sigma_\alpha$.

$T_\alpha(\tilde{T}(y))(\phi) = \tilde{T}(y)(\phi) = \tilde{T}_\alpha(\phi)$ (nach Definition von $\tilde{T}$),
d.h. $T_\alpha \circ \tilde{T} = \tilde{T}_\alpha$.

Insgesamt erhält man hieraus: $\mathcal{A}_p(S)$ ist projektiver Limes der $\mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha)$ ($\alpha \in A$).

$f_S \in \mathcal{A}_p(S)$, denn für $\alpha \in A$ gilt:

$f_S|_{\Sigma_\alpha} \in \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha)$.

Daß f_S Einselement von $\mathcal{A}_p(S)$ ist, ist offensichtlich.

(2.1.10) Bemerkung

Seien S, P wie in (2.1.9).

Für $\alpha \in A$ sei $\tilde{S}_\alpha := \Sigma_\alpha$. Dann folgt: $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in A} \tilde{S}_\alpha$; für $(\tilde{S}_\alpha)_{\alpha \in A}$ sind (2.1.6) und (2.1.7) erfüllt, sodaß auch $\mathcal{A}_p(\Sigma)$ definiert ist.

Es gilt:

$\mathcal{A}_p(S)$ ist ein Ideal von $\mathcal{A}_p(\Sigma)$.

2.2 Zusammenhang mit den Fouriertransformierten von Distributionen

Wie schon zu Beginn von §2 angedeutet, läßt sich das Bild unter der Fouriertransformation gewisser Distributionenräume über einer kompakten Gruppe mit einer geeigneten Algebra $\mathcal{A}_p(S)$ identifizieren. Im folgenden wird jedoch im wesentlichen nur auf Distributionenräume über abelschen kompakten Gruppen eingegangen. Das Bild von $\mathcal{A}'_1(G)$ unter der Fouriertransformation werden wir jedoch auch für allgemeines kompaktes G angeben.

Zunächst sollen für Gruppen vom Typ $G = T^n \times F$ ($n \in \mathbb{N}$, F endliche abelsche Gruppe) Verallgemeinerungen der Aussagen über $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{D}'(T))$ und $\tilde{\mathcal{F}}(\text{Kern } \tilde{\mu}_T)$ gezeigt werden. Wir definieren die Fouriertransformation auf $\mathcal{D}'(T^n \times F)$ ($n \in \mathbb{N}$, F endliche abelsche Gruppe) folgendermaßen:

$$(2.2.1) \quad \tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{D}'(T^n \times F) \longrightarrow \{f|f: \mathbb{Z}^n \times F \longrightarrow \mathbb{C}\},$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(S)(k, x) := S(e_{-(k, x)}) \quad \text{für } S \in \mathcal{D}'(T^n \times F), \quad k \in \mathbb{Z}^n \text{ und } x \in F$$

wobei $e_{(k, x)} \in \mathcal{D}(T^n \times F)$ definiert sei durch:

$$e_{(k, x)}(z, y) := [(z, y), (k, x)] \quad (z \in T^n, y \in F)$$

$$\text{für } k \in \mathbb{Z}^n (= (T^n)^\wedge), \quad x \in F (= \hat{F}).$$

Wir haben dann:

(2.2.2) Satz (n, F wie oben)

Sei $p: \mathbb{Z}^n \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(k, x) \longmapsto \ln(1 + |k|)$ mit $|k| := \sum_{j=1}^n |k_j|$ für $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Dann gilt:

a) $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{D}'(T^n \times F)) = \mathcal{A}_p(\mathbb{Z}^n \times F)$.

$\tilde{\mathcal{F}}$ stellt einen $\mathbb{C}$ -Algebren-Isomorphismus von $\mathcal{D}'(T^n \times F)$ auf $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z}^n \times F)$ dar.

b) $\tilde{\mathcal{F}}(\text{Kern } \tilde{\mu}_{T^n \times F}) = \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^*)$ mit $(\mathbb{Z}^n \times F)^* := (\mathbb{Z}^n \times F) \setminus \{0\}$.

c) Sei $1 \leq j \leq n$. Sei $\partial_j: \mathcal{D}(T^n \times F) \longrightarrow \mathcal{D}(T^n \times F)$ definiert durch $\partial_j(f \otimes g) := (\partial_j f) \otimes g^2$ für $f \in \mathcal{D}(T^n)$, $g \in \mathcal{D}(F)$. Da ∂_j stetig ist, gilt für $S \in \mathcal{D}'(T^n \times F)$: $\partial_j S := -(S \circ \partial_j)$ ist ein Element von $\mathcal{D}'(T^n \times F)$. $\partial_j(\mathcal{D}'(T^n \times F)) := \{\partial_j S | S \in \mathcal{D}'(T^n \times F)\}$.

$$(\mathbb{Z}^n \times F)^j := \{(k, x) \in \mathbb{Z}^n \times F | k_j \neq 0\}.$$

Es gilt: $\tilde{\mathcal{F}}(\partial_j(\mathcal{D}'(T^n \times F))) = \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^j)$.

1) Zur Definition von $\tilde{\mu}_{T^n \times F}$ vgl. (1.1.27)b).

2) $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ($1 \leq j \leq n$) seien die partiellen Ableitungen auf T^n .

Beweis:

a) vgl. Schwartz [1], Kap. VII, §1 und Bruhat [2], p. 138.¹⁾

b) Sei $S \in \mathcal{D}'(T^n \times F)$. Dann gilt:

$$S \in \text{Kern } \tilde{\mathcal{F}}_{T^n \times F} \iff S(1) = \tilde{\mathcal{F}}(S)(0) = 0 \iff \tilde{\mathcal{F}}(S) \in \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^*).$$

Aus a) folgt die Behauptung.

c) Sei $S \in \mathcal{D}'(T^n \times F)$, $1 \leq j \leq n$. $\dot{S}_j := \dot{\partial}_j S$.

Aus (1.1.20)c) folgt, daß

$$\dot{S}_j * S = S * (-\dot{\partial}_j) = -\dot{\partial}_j S.$$

Deshalb:

$$\tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j S) = \tilde{\mathcal{F}}(\dot{S}_j * S) = \tilde{\mathcal{F}}(\dot{S}_j) \tilde{\mathcal{F}}(S) \in \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^j),$$

da für $(k, x) \in \mathbb{Z}^n \times F$ gilt:

$$\tilde{\mathcal{F}}(\dot{S}_j)(k, x) = 2\pi i k_j, \text{ d.h. } \tilde{\mathcal{F}}(\dot{S}_j) \in \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^j).$$

Man hat also:

$$\tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j(\mathcal{D}'(T^n \times F))) \subset \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^j).$$

Sei umgekehrt $g \in \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^j)$. Dann gilt:

$f: \mathbb{Z}^n \times F \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(k, x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i k_j} g(k, x) & \text{falls } k_j \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ((k, x) \in \mathbb{Z}^n \times F)$$

ist ein Element von $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z}^n \times F)$ mit $g = \tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j) f$.

Aus a) folgt:

Es gibt ein $S_0 \in \mathcal{D}'(T^n \times F)$ mit $\tilde{\mathcal{F}}(S_0) = f$; daher:

$$g = \tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j) \tilde{\mathcal{F}}(S_0) = \tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j * S_0) = \tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j S_0) \in \tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j(\mathcal{D}'(T^n \times F))).$$

Es gilt also auch $\mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n \times F)^j) \subset \tilde{\mathcal{F}}(\dot{\partial}_j(\mathcal{D}'(T^n \times F)))$.

Die Aussage (2.2.2)c) werden wir später in (4.3.2) verwenden.

Ist nun G eine beliebige kompakte abelsche Gruppe, so kann man auf $\mathcal{D}'(G)$ die Fouriertransformation analog zu (2.2.1) definieren:

$$(2.2.3) \quad \tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{D}'(G) \longrightarrow \{f | f: \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}\} \\ \tilde{\mathcal{F}}(S)(\xi) := S(\xi^{-1}) \quad \text{für } \xi \in \hat{G}$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ ist wohldefiniert, denn sei $G = \text{proj} \lim (A, G_\alpha, \text{pr}_{\alpha\beta})$ mit $G_\alpha = G/H_\alpha$ ($\alpha \in A$) und $A, H_\alpha, \text{pr}_{\alpha\beta}$ wie in (2.1.8), so gilt für $\xi \in \hat{G}$ wegen $\hat{G} = \bigcup i_\alpha(\hat{G}_\alpha)$ (siehe (2.1.8)):

Es gibt ein $\alpha \in A$ und ein $\eta \in \hat{G}_\alpha$ mit $i_\alpha(\eta) = \xi$.

Wegen $G_\alpha \cong T^{n_\alpha} \times F_\alpha$ für $n_\alpha \in \mathbb{N}$ und endliches F_α (vgl. (2.1.8)) gilt: $\eta^{-1} \in \mathcal{D}(G_\alpha)$.

Es folgt: $\xi^{-1} = I_\alpha(\eta^{-1}) \in \mathcal{D}(G)$ (dabei sei $I_\alpha := I_{H_\alpha}$ wie in (1.1.4)).

1) $\mathcal{A}_p(\mathbb{Z}^n \times F) = \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n \times F)$ = Raum der "langsam wachsenden" Funktionen auf $\mathbb{Z}^n \times F$.

Gemäß (2.1.8) sind für $\Sigma := \hat{G}$, $\Sigma_\alpha := i_\alpha(\hat{G}_\alpha)$ und $S_\alpha := i_\alpha(\hat{G}_\alpha \setminus \{0\})$ ($\alpha \in A$) (2.1.5) und (2.1.6) erfüllt.

Sei $\alpha \in A$, $p'_\alpha: \hat{G}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(k, x) \mapsto p'_\alpha(k, x)$,
mit $p'_\alpha(k, x) := \ln(1 + |k|)$, wobei $|k| := \sum_{j=1}^{n_\alpha} |k_j|$ (für $k \in \mathbb{Z}^{n_\alpha}$, $x \in \mathbb{R}_\alpha$)
(vgl. (2.2.2)).

Dann gilt:

$$(2.2.4) \quad \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta, f \in \mathcal{A}_{p'_\beta}(\hat{G}_\beta) \implies f \circ i_{\beta\alpha} \in \mathcal{A}_{p'_\alpha}(\hat{G}_\alpha),$$

denn:

Sei $\tilde{F}_\alpha: \mathcal{D}'(\hat{G}_\alpha) \rightarrow \mathcal{A}_{p'_\alpha}(\hat{G}_\alpha)$ die Fouriertransformation auf $\mathcal{D}'(\hat{G}_\alpha)$ gemäß (2.2.2) ($\alpha \in A$).

Seien $I_{\beta\alpha}: \mathcal{D}'(\hat{G}_\alpha) \rightarrow \mathcal{D}'(\hat{G}_\beta)$, $I_{\beta\alpha} := I_{H_\alpha H_\beta}$ (wie in (1.1.4)),
 $Q_{\alpha\beta}: \mathcal{D}'(\hat{G}_\beta) \rightarrow \mathcal{D}'(\hat{G}_\alpha)$, $Q_{\alpha\beta} := Q_{H_\beta H_\alpha}$ (wie in (1.1.5))
für $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$.

Sei $f \in \mathcal{A}_{p'_\beta}(\hat{G}_\beta)$ für $\beta \in A$, sei $\alpha \in A$ mit $\alpha \neq \beta$.

Dann gibt es wegen (2.2.2) ein $S \in \mathcal{D}'(\hat{G}_\beta)$ mit $\tilde{F}_\beta(S) = f$;

für $\eta \in \hat{G}_\alpha$ gilt daher:

$$\begin{aligned} f(i_{\beta\alpha}(\eta)) &= \tilde{F}_\beta(S)(i_{\beta\alpha}(\eta)) = S((i_{\beta\alpha}(\eta))^{-1}) = S(I_{\beta\alpha}(\eta^{-1})) = \\ &= Q_{\alpha\beta}(S)(\eta^{-1}) = \tilde{F}_\alpha(Q_{\alpha\beta}(S))(\eta) \end{aligned}$$

Wegen $\tilde{F}_\alpha(Q_{\alpha\beta}(S)) \in \mathcal{A}_{p'_\alpha}(\hat{G}_\alpha)$ gilt daher auch $f \circ i_{\beta\alpha} \in \mathcal{A}_{p'_\alpha}(\hat{G}_\alpha)$.

Aus (2.2.4) folgt für $p_\alpha: i_\alpha(\hat{G}_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$i_\alpha((k, x)) \mapsto p'_\alpha(k, x) \quad (k \in \mathbb{Z}^{n_\alpha}, x \in \mathbb{R}_\alpha) \quad (\alpha \in A):$$

$$\begin{aligned} (2.2.5) \quad \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta, f \in \mathcal{A}_{p_\beta}(i_\beta(\hat{G}_\beta)) &\implies \\ f|_{i_\alpha(\hat{G}_\alpha)} &\in \mathcal{A}_{p_\alpha}(i_\alpha(\hat{G}_\alpha)), \\ \text{d.h. } (p_\alpha)_\alpha &\in A \text{ erfüllt (2.1.7)}^1). \end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen und $\hat{G} \setminus \{0\} = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ (S_α wie oben)
erhält man:

(2.2.6) Satz Mit $P := (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ gilt:

$$a) \quad \tilde{F}(\mathcal{D}'(G)) = \mathcal{A}_P(\hat{G})$$

$\tilde{F}$ stellt einen $\mathbb{C}$ -Algebren-Isomorphismus von $\mathcal{D}'(G)$ auf $\mathcal{A}_P(\hat{G})$ dar.

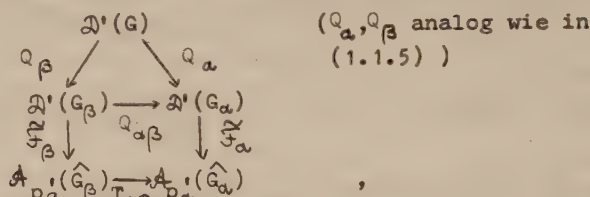
$$b) \quad \tilde{F}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G) = \mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{0\}).$$

1) Man beachte, daß i.a. nicht gelten muß: $p_\beta|_{\Sigma_\alpha} = p_\alpha$ (für $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in A$): In der Definition von p'_α steckt die willkürliche isomorphe Identifizierung von $\hat{G}_\alpha$ mit $\mathbb{Z}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}_\alpha$ ($\alpha \in A$). Ist G jedoch metrisierbar, so läßt sich zeigen, daß gilt: $p_\alpha = p|_{\Sigma_\alpha}$ für alle $\alpha \in A$ für geeignete Wahl von $p: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Beweis:

Seien $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$. $T_{\alpha\beta}: \mathcal{A}_{p_\beta}'(\hat{G}_\beta) \rightarrow \mathcal{A}_{p_\alpha}'(\hat{G}_\alpha)$, $f \mapsto f \circ i_{\beta\alpha}$.

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:



denn sei $S \in \mathcal{D}'(G_\alpha)$, $\xi \in \hat{G}_\alpha$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{F}}_\alpha(Q_{\alpha\beta}(S))(\xi) &= Q_{\alpha\beta}(S)(\xi^{-1}) = S(I_{\beta\alpha}(\xi^{-1})) = \\
 &= S(i_{\beta\alpha}(\xi^{-1})) = \tilde{\mathcal{F}}_\beta(S)(i_{\beta\alpha}(\xi)) = T_{\alpha\beta}(\tilde{\mathcal{F}}_\beta(S))(\xi); \text{ d.h.}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_\alpha \circ Q_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \circ \tilde{\mathcal{F}}_\beta.$$

Wegen $Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} \circ Q_\beta$ folgt die Kommutativität des Diagramms.

Wegen $\mathcal{A}_p(\hat{G}) = \text{proj lim}(A, \mathcal{A}_{p_\alpha}'(\hat{G}_\alpha), T_{\alpha\beta}(\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$ mit den kanonischen Projektionen $T_\alpha: \mathcal{A}_p(\hat{G}) \rightarrow \mathcal{A}_{p_\alpha}'(\hat{G}_\alpha)$, $f \mapsto f \circ i_\alpha$, gibt es daher genau einen $\mathbb{C}$ -Algebren-Homomorphismus $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(\hat{G})$ mit: $T_\alpha \circ \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_\alpha \circ Q_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. (*)

Wir zeigen, daß gilt:

$\tilde{\mathcal{F}}(S) \circ i_\alpha \in \mathcal{A}_{p_\alpha}'(\hat{G}_\alpha)$ für alle $\alpha \in A$, $S \in \mathcal{D}'(G)$, woraus

folgt, daß $\tilde{\mathcal{F}}(S) \in \mathcal{A}_p(\hat{G})$ für alle $S \in \mathcal{D}'(G)$ und $\tilde{\mathcal{F}}:$

$\mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(\hat{G})$ ebenfalls (*) (mit $\tilde{\mathcal{F}}$ statt $\tilde{\mathcal{F}}'$) erfüllt.

Sei $\alpha \in A$, $S \in \mathcal{D}'(G)$, $\xi \in \hat{G}_\alpha$, $I_\alpha: \mathcal{D}'(G_\alpha) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$ wie in (1.1.4).

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{F}}(S)(i_\alpha(\xi)) &= S(i_\alpha(\xi^{-1})) = S(I_\alpha(\xi^{-1})) = Q_\alpha(S)(\xi^{-1}) = \\
 &= \tilde{\mathcal{F}}_\alpha(Q_\alpha(S))(\xi), \text{ d.h. } \tilde{\mathcal{F}}(S) \circ i_\alpha = \tilde{\mathcal{F}}_\alpha(Q_\alpha(S)) \in \mathcal{A}_{p_\alpha}'(\hat{G}_\alpha).
 \end{aligned}$$

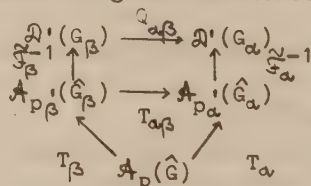
Wegen $\hat{G} = \bigcup_{\alpha \in A} i_\alpha(\hat{G}_\alpha)$ erhält man: $\tilde{\mathcal{F}}' = \tilde{\mathcal{F}}$, insbesondere ist

$\tilde{\mathcal{F}}$ ein $\mathbb{C}$ -Algebren-Homomorphismus von $\mathcal{D}'(G)$ in $\mathcal{A}_p(\hat{G})$.

Um zu zeigen, daß $\tilde{\mathcal{F}}$ ein Isomorphismus ist, betrachten wir folgende Abbildung $\mathcal{U}: \mathcal{A}_p(\hat{G}) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$:

Da die Abbildungen $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$ Isomorphismen sind und wegen $T_\alpha = T_{\alpha\beta} \circ T_\beta$ für $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$,

ist auch das folgende Diagramm kommutativ: ($\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$)



Da $\mathcal{D}'(G)$ projektiver Limes der $\mathcal{D}'(G_\alpha)$ ist, gibt es genau einen $\mathbb{C}$ -Algebren-Homomorphismus $\mathcal{U}: \mathcal{A}_P(\hat{G}) \longrightarrow \mathcal{D}'(G)$ mit $Q_\alpha \circ \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}_\alpha^{-1} \circ T_\alpha$ für alle $\alpha \in A$ (**).

Es folgt für $S \in \mathcal{D}'(G)$, $f \in \mathcal{D}(G_\alpha)$ ($\alpha \in A$):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\tilde{\mathcal{F}}(S))(I_\alpha(f)) &= Q_\alpha(\mathcal{U}(\tilde{\mathcal{F}}(S)))(f) = \tilde{\mathcal{U}}_\alpha^{-1}(T_\alpha(\tilde{\mathcal{F}}(S)))(f) = \\ &= \tilde{\mathcal{U}}_\alpha^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha(Q_\alpha(S)))(f) = Q_\alpha(S)(f) = S(I_\alpha(f)). \end{aligned} \quad (**)$$

Wegen $\mathcal{D}(G) = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha(\mathcal{D}(G_\alpha))$ folgt hieraus: $\mathcal{U} \circ \tilde{\mathcal{F}} = \text{id}_{\mathcal{D}'(G)}$.

Sei umgekehrt $f \in \mathcal{A}_P(\hat{G})$, $\xi \in \hat{G}_\alpha$, $\alpha \in A$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}(f))(i_\alpha(\xi)) &= \mathcal{U}(f)(i_\alpha(\xi^{-1})) = \mathcal{U}(f)(I_\alpha(\xi^{-1})) = \\ &= Q_\alpha(\mathcal{U}(f))(\xi^{-1}) = \tilde{\mathcal{U}}_\alpha(Q_\alpha(\mathcal{U}(f)))(\xi) = \tilde{\mathcal{U}}_\alpha(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha^{-1}(T_\alpha(f)))(\xi) = \\ &= T_\alpha(f)(\xi) = f(i_\alpha(\xi)). \end{aligned} \quad (**)$$

Wegen $G = \bigcup_{\alpha \in A} i_\alpha(\hat{G}_\alpha)$ ergibt sich: $\tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{U} = \text{id}_{\mathcal{A}_P(\hat{G})}$.

zu b):

Sei $S \in \mathcal{D}'(G)$. Dann gilt: (wegen a))

$$S \in \text{Kern } \tilde{\mu}_G \iff S(1) = \tilde{\mathcal{F}}(S)(\theta) = 0 \iff \tilde{\mathcal{F}}(S) \in \mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{\theta\}).$$

Sei nun G eine beliebige kompakte Gruppe, Σ das duale Objekt von G . Dann gilt:

(2.2.7) Sei $\sigma \in \Sigma$, $U^{(\sigma)} \in \mathcal{G}$ fest, $\xi, \eta \in H_\sigma$.

Die Abbildung $f_{\sigma, \xi, \eta}: G \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle \bar{U}_x^{(\sigma)} \xi, \eta \rangle$

ist ein Element von $A_1(G)$

(Hewitt/Ross [2], (32.11)).

Wir definieren die Fouriertransformation auf $A_1'(G)$ deshalb wie folgt:

$$(2.2.8) \quad \tilde{\mathcal{F}}_0: A_1'(G) \longrightarrow \prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_\sigma) \quad \text{mit} \\ \langle \tilde{\mathcal{F}}_0(S)(\sigma)(\xi, \eta) \rangle := \tilde{\mathcal{F}}_0(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma, \xi, \eta}^{-1})^1 \quad (\text{für } \sigma \in \Sigma, \xi, \eta \in H_\sigma, S \in A_1'(G))$$

(Da die Abbildung $\mathcal{K}(G) \longrightarrow A_1'(G)$, $f \mapsto S_f$, mit

$$S_f(g) := \int_G f(x)g(x) d\mu_G(x) \quad \text{für } g \in A_1(G)$$

ein wohldefinierter Monomorphismus ist (wegen Hewitt/Ross [2], (34.6), (2.2.7) und der Injektivität der Fouriertransformation

1) a) $\tilde{\mathcal{F}}_0$ hängt offenbar von der Wahl der $U^{(\sigma)} \in \mathcal{G}$ ab.

b) Ist G abelsch, so überlegt man sich leicht, daß $\mathcal{D}(G) \subset A_1(G)$ und daß die von $A_1(G)$ auf $\mathcal{D}(G)$ induzierte Topologie gröber ist als die übliche Topologie von $\mathcal{D}(G)$ und daher $A_1'(G)$ als Teilraum von $\mathcal{D}'(G)$ aufgefaßt werden kann ($\mathcal{D}(G)$ ist dicht in $A_1(G)$).

$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ (mit $\mathcal{U} := (U(\sigma))_{\sigma \in \Sigma}$; vgl. (0.8)), kann $\mathcal{K}(G)$ mit einem linearen Teilraum von $A_1^1(G)$ identifiziert werden.

Es gilt für $f \in \mathcal{K}(G)$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(f) = \tilde{\mathcal{F}}_0(S_f).$$

Seien $A_0(\Sigma)$ bzw. $A_0(\Sigma \setminus \{\sigma_0\})$ gemäß (2.1.2) Definition mit $p : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\sigma \mapsto 0$. Dann erhält man :

(2.2.9) Satz

a) $\tilde{\mathcal{F}}_0(A_1^1(G)) = A_0(\Sigma)$

$\tilde{\mathcal{F}}_0$ ist ein Isomorphismus von $A_1^1(G)$ auf $A_0(\Sigma)$ mit :

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(a_S) = \bar{U}_a \circ \tilde{\mathcal{F}}_0(S) \quad \text{für alle } S \in A_1^1(G), a \in G.$$

b) $\tilde{\mathcal{F}}_0(\text{Kern } \tilde{\mu}_G) = A_0(\Sigma \setminus \{\sigma_0\})$, mit $\tilde{\mu}_G : A_1^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$, $S \mapsto S(1)$, was offenbar eine stetige Fortsetzung von μ_G auf $A_1^1(G)$ ist.

Beweis:

a) Nach Hewitt/Ross [2], (D.42) gilt :

$$\mathcal{E}_{\infty}(\Sigma) = A_0(\Sigma).$$

Gemäß Hewitt/Ross [2], (34.7) stellt $\mathcal{F}|_{A_1^1(G)}$ einen isometrischen Isomorphismus von $A_1^1(G)$ auf $\mathcal{E}_1(\Sigma)$ dar.

Daher ist die Transponierte $\mathcal{U}$ der Abbildung

$$\mathcal{E}_1(\Sigma) \longrightarrow A_1^1(G), \quad (f_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma} \mapsto \mathcal{F}^{-1}((f_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma})$$

ein Isomorphismus von $A_1^1(G)$ auf $\mathcal{E}_1(\Sigma)' \cong \mathcal{E}_{\infty}(\Sigma)$

(vgl. (0.9)).

Es gilt: $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{U}$.

Sei hierzu $S \in A_1^1(G)$; für $\sigma \in \Sigma$ sei $\xi_1^{\sigma}, \dots, \xi_{d_{\sigma}}^{\sigma}$ jeweils eine Orthonormalbasis von H_{σ} . Weiter seien $\sigma \in \Sigma$, $k, l \in \{1, \dots, d_{\sigma}\}$.

Wegen $\mathcal{U}(S) \in \mathcal{E}_1(\Sigma)' \cong \mathcal{E}_{\infty}(\Sigma)$ gibt es (vgl. (0.9)) genau ein Element $(F_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma} \in \mathcal{E}_{\infty}(\Sigma)$, so daß gilt :

$$\mathcal{U}(S)((F_{\sigma'})_{\sigma' \in \Sigma}) = \sum_{\sigma' \in \Sigma} d_{\sigma'} \text{Spur}(E_{\sigma'} \circ F_{\sigma'}) \quad \text{für alle } (F_{\sigma'})_{\sigma' \in \Sigma} \in \mathcal{E}_1(\Sigma).$$

Sei $(E_{\sigma'})_{\sigma' \in \Sigma} \in \mathcal{E}_1(\Sigma)$ definiert durch :

$$\langle E_{\sigma'}(\xi_i^{\sigma'}), \xi_j^{\sigma'} \rangle := \langle \mathcal{F}(f_{\sigma', \xi_k^{\sigma'}, \xi_l^{\sigma'}})(\sigma')(\xi_i^{\sigma'}), \xi_j^{\sigma'} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{d_{\sigma}} & \text{falls } \sigma = \sigma', i=1, j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i, j \in \{1, \dots, d_{\sigma}\}$$

(vgl. Hewitt/Ross [2], (27.19)). Dann folgt :

$$\begin{aligned} \langle F_{\sigma}(\xi_k^{\sigma}), \xi_l^{\sigma} \rangle &= \sum_{\sigma' \in \Sigma} d_{\sigma'} \text{Spur}(E_{\sigma'} \circ F_{\sigma'}) = \mathcal{U}(S)((E_{\sigma'})_{\sigma' \in \Sigma}) = \\ &= \mathcal{U}(S)(\mathcal{F}(f_{\sigma, \xi_k^{\sigma}, \xi_l^{\sigma}})) = S(f_{\sigma, \xi_k^{\sigma}, \xi_l^{\sigma}}) = \langle \tilde{\mathcal{F}}_0(S)(\sigma)(\xi_k^{\sigma}), \xi_l^{\sigma} \rangle. \end{aligned}$$

Insgesamt hat man daher : $\mathcal{U}(S) = \tilde{\mathcal{F}}_0(S)$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Sei } S \in A_1^*(G), a \in G, \epsilon \in \Sigma, \xi, \eta \in H_{\epsilon} \\
 & \langle \tilde{f}_0^*(aS)(\epsilon) \xi, \eta \rangle = {}^a S(f_{\epsilon, \xi, \eta}) = S({}^a f_{\epsilon, \xi, \eta}) = \\
 & = S(f_{\epsilon, \xi, \bar{a}^{-1} \eta}) = \langle \tilde{f}_0^*(S)(\epsilon)(\xi), \bar{a}^{-1} \eta \rangle = \\
 & = \langle \bar{a}^{-1} \tilde{f}_0^*(S)(\epsilon)(\xi), \eta \rangle, \text{ d.h.} \\
 & \tilde{f}_0^*(aS) = \bar{a}^{-1} \tilde{f}_0^*(S) .
 \end{aligned}$$

b) Sei $S \in A_1^*(G)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 S \in \text{Kern } \tilde{\mu}_G & \iff \tilde{f}_0^*(S)(\epsilon_0) = S(1) = \tilde{\mu}_G(S) = 0 \iff \\
 \tilde{f}_0^*(S) & \in A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) .
 \end{aligned}$$

Für den "profiniten" Fall werden wir zeigen, daß sogar gilt: $f_{\epsilon, \xi, \eta} \in \mathcal{D}(G)$ (für $\epsilon \in \Sigma, \xi, \eta \in H_{\epsilon}$)¹⁾:

(2.2.10) Definition

Sei G eine kompakte Gruppe.

G heißt profinnit, wenn es eine konfinale Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ gibt, $\mathcal{B} := \{K \subset G \mid K \text{ abgeschlossener Normalteiler von } G, G/K \text{ LIE-Gruppe}\}$, so daß für alle $K \in \mathcal{U}$ gilt: G/K endlich.²⁾

Ist G profinit, so ist $G = \text{proj lim } (A, G/H_{\alpha}, \text{pr}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$

mit: A geeignete gerichtete Indexmenge, $(H_{\alpha})_{\alpha \in A}$ Familie von abgeschlossenen Normalteilern von G , G/H_{α} endlich für alle $\alpha \in A$, $\bigcap_{\alpha \in A} H_{\alpha} = \{e\}$; $\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta \implies H_{\beta} \subset H_{\alpha}$,

$\text{pr}_{\alpha\beta}: G/H_{\beta} \rightarrow G/H_{\alpha}$ kanonisch. Die kanonischen Projektionen $\text{pr}_{\alpha}: G \rightarrow G/H_{\alpha}$ sind die Quotientenabbildungen $\pi_{H_{\alpha}} (\alpha \in A)$.

Da G/H_{α} endlich ist, ist jedes H_{α} eine offene Untergruppe von G ; $A(\Sigma, H_{\alpha})$ ist daher endlich für alle $\alpha \in A$ (Hewitt/Ross [2], (28.11)). Die dualen Objekte von G/H_{α} , die mit $A(\Sigma, H_{\alpha}) =: \sum_{\alpha}$ identifiziert werden können (Hewitt/Ross [2], (28.10)) ($\alpha \in A$), sind also ebenfalls endlich. Es gilt deshalb:

$$\mathcal{D}(G/H_{\alpha}) = \mathcal{H}(G/H_{\alpha}) = A_1(G/H_{\alpha}) \text{ für alle } \alpha \in A.$$

1) Man kann allgemein zeigen, daß für alle kompakten Gruppen G gilt: $f_{\epsilon, \xi, \eta} \in \mathcal{D}(G)$ (für $\epsilon \in \Sigma, \xi, \eta \in H_{\epsilon}$) (man überlegt sich leicht, daß diese Aussage für kompakte LIE-Gruppen gilt und schließt auf den allgemeinen kompakten Fall analog wie in (2.2.3)).

2) Ist G profinit, so gilt G/K endlich für alle $K \in \mathcal{B}$.

Sei nun $\sigma \in \Sigma, \xi, \eta \in H_0$.

Wegen (2.1.8) gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\sigma \in \Sigma_\alpha$.

Deshalb: $f_{\sigma, \xi, \eta} = I_\alpha(f_{\sigma_\alpha, \xi, \eta}) \in I_\alpha(\mathcal{D}(G/H_\alpha)) \subset \mathcal{D}(G)$

mit σ_α = Äquivalenzklasse der Darstellung

$U^{(\sigma_\alpha)}: G/H_\alpha \longrightarrow H_0, xH \longmapsto U_x^{(\sigma)}$,

$f_{\sigma_\alpha, \xi, \eta}$ entsprechend wie in (2.2.7), $I_\alpha := I_{H_\alpha}$ wie in (1.1.4).

Man kann deshalb die Fouriertransformation auch auf $\mathcal{D}'(G)$ erklären:

(2.2.11) Sei $S \in \mathcal{D}'(G), \sigma \in \Sigma, \xi, \eta \in H_0$.

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}(S)(\sigma) \xi, \eta \rangle := S(f_{\sigma, \xi, \eta})$$

(Diese Definition ist mit den Definitionen in (2.2.3) und in (2.2.8) verträglich.)

Wir untersuchen wieder das Bild von $\mathcal{D}'(G)$ unter der Fouriertransformation $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{D}'(G) \longrightarrow \prod_{\sigma \in \Sigma} B(H_0), S \longmapsto (\tilde{\mathcal{F}}(S)(\sigma))_{\sigma \in \Sigma}$, mit $\tilde{\mathcal{F}}(S)(\sigma)$ für $\sigma \in \Sigma$ wie oben definiert.

Es gilt:

(2.2.12) Satz

Sei G profinit; Bezeichnungen wie oben.

Für alle $\alpha \in A$ sei $p_\alpha: \Sigma_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_+, \sigma \longmapsto 0$.

Dann erfüllen $(p_\alpha)_{\alpha \in A}, (\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}, (S_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $S_\alpha := \Sigma_\alpha \setminus \{\sigma_0\}$ ($\alpha \in A$) (2.1.5), (2.1.6) und (2.1.7).

Für $P^1 := (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ gilt:

a) $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{D}'(G)) = \mathcal{A}_{P^1}(\Sigma).$

$\tilde{\mathcal{F}}$ stellt einen $\mathbb{C}$ -Algebren-Homomorphismus von $\mathcal{D}'(G)$ auf $\mathcal{A}_{P^1}(\Sigma)$ dar.

b) $\tilde{\mathcal{F}}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G) = \mathcal{A}_{P^1}(\Sigma \setminus \{\sigma_0\}).$

Beweis:

(2.1.5) und (2.1.6) folgen aus (2.1.8) .

Trivialerweise erfüllt $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ (2.1.7) .

Seien $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$.

Dann gilt für $\sigma \in \Sigma_\alpha$, $\xi, \eta \in H_\sigma$:

$$I_{\beta\alpha}(f_{\sigma_\alpha, \xi, \eta}) = f_{\sigma_\beta, \xi, \eta} \quad (I_{\beta\alpha}: \mathcal{D}(G/H_\alpha) \longrightarrow (G/H_\beta) \text{ wie in } (1.1.4) , \sigma_\alpha, \sigma_\beta \text{ wie vor (2.2.12) }) .$$

Mittels dieser Beziehung und unter Ausnutzung von

$\mathcal{D}'(G) = \text{proj lim}(A, \mathcal{D}'(G/H_\alpha), p_{\alpha\beta}(\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$ und

$\mathcal{A}_p 1(\Sigma) = \text{proj lim}(A, \mathcal{A}_{p_\alpha}(\Sigma_\alpha), T_{\alpha\beta}(\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$

($p_{\alpha\beta}$ wie in (1.1.5) , $T_{\alpha\beta}$ wie in (2.1.9) für $\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta$)

zeigt man nun völlig analog wie im Beweis von (2.2.6) a), daß

$\tilde{\mathcal{F}}$ einen $\mathbb{C}$ -Algebren-Isomorphismus von $\mathcal{D}'(G)$ auf $\mathcal{A}_p 1(\Sigma)$ darstellt.

zu b) : Sei $S \in \mathcal{D}'(G)$.

$$S \in \text{Kern } \tilde{\mu}_G \iff 0 = S(1) = \tilde{\mathcal{F}}(S)(\sigma_0) \iff \tilde{\mathcal{F}}(S) \in \mathcal{A}_p 1(\Sigma \setminus \{\sigma_0\}) .$$

2.3 Ein Erzeugungstheorem für $\mathcal{A}_P(S)$

Sei G eine kompakte abelsche Gruppe.

(2.3.1) Sei $a \in G$. $f_a: \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}, \xi \mapsto 1 - \overline{\xi(a)}$.

Mit den Bezeichnungen wie bei (2.2.3) bis (2.2.4) gilt dann :

(2.3.2) $f_a \in \mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{0\})$ ($P = (p_a)_{a \in A}$) für alle $a \in G$,
denn $f_a = \mathcal{F}(\delta - {}^a\delta)$ für alle $a \in G$.

Da für $B \subset G$ gilt:

$$\Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \langle \delta - {}^a\delta \mid a \in B \rangle$$

(:= das von $\{\delta - {}^a\delta \mid a \in B\}$ erzeugte Ideal in der
(Faltungs-) Algebra $\mathcal{D}'(G)$ (vgl. (1.1.22)))

und $\mathcal{F}$ ein Algebrasomorphismus ist (siehe (2.2.6)) , folgt :

$$(2.3.3) \quad \mathcal{F}(\Delta_B(\mathcal{D}'(G))) = \langle f_a \mid a \in B \rangle$$

(:= das von $\{f_a \mid a \in B\}$ in $\mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{0\})$
erzeugte Ideal) .

Aus (2.3.3) und $\mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{0\}) = \mathcal{F}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G)$ folgt , daß
die Aussagen (für $B \subset G$)

$$(2.3.4) \quad a) \quad \Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$$

und

$$b) \quad \langle f_a \mid a \in B \rangle = \mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{0\})$$

äquivalent sind.

Ist G eine beliebige kompakte Gruppe , so kann man definieren (Σ sei das duale Objekt von G) :

(2.3.5) Sei $a \in G$. $f_a := (f_a(\sigma))_{\sigma \in \Sigma}$ mit $f_a(\sigma) := \text{id} - \overline{v_a(\sigma)}$
für $\sigma \in \Sigma$, $\overline{v(\sigma)} \in \sigma$ wie in (2.2.7) .

Es gilt: (mit $A_0(\Sigma)$ bzw. $A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ wie in (2.2.9))

(2.3.6) $f_a \in A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ für alle $a \in G$, denn: ($\sigma \in \Sigma$, $a \in G$)

$$\|f_a(\sigma)\|^6 = \|id - \overline{U}_a(\sigma)\|^6 \leq \|id\|^6 + \|\overline{U}_a(\sigma)\|^6 = 2 ;$$

$$f_a(\epsilon_0) = 1 - 1 = 0 .$$

Für $B \subset G$ erhält man (mit $\tilde{\mathcal{F}}_0$ wie in (2.2.8)) :

$$(2.3.7) \quad \tilde{\mathcal{F}}_0(\Delta_B(A_1^*(G))) = \langle f_a \mid a \in B \rangle (:= \text{das von } \{f_a \mid a \in B\} \text{ in } A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) \text{ erzeugte Rechtsideal}) ,$$

denn für $S_1, \dots, S_r \in A_1^*(G)$, $a_1, \dots, a_r \in G$ ($r \in \mathbb{N}^*$) gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_0\left(\sum_{v=1}^r S_v - a_v S_v\right)(\sigma) &= \\ &= \left(\sum_{v=1}^r \tilde{\mathcal{F}}_0(S_v) - \tilde{\mathcal{F}}_0(a_v S_v)\right)(\sigma) = \sum_{v=1}^r \tilde{\mathcal{F}}_0(S_v)(\sigma) - \overline{U}_{a_v}(\sigma) \tilde{\mathcal{F}}_0(S_v)(\sigma) \quad ((2.2.9)a) \\ &= \sum_{v=1}^r (id - \overline{U}_{a_v}(\sigma)) \tilde{\mathcal{F}}_0(S_v)(\sigma) = \sum_{v=1}^r f_{a_v}(\sigma) \tilde{\mathcal{F}}_0(S_v)(\sigma) \text{ für alle } \sigma \in \Sigma; \end{aligned}$$

d.h. $\tilde{\mathcal{F}}_0(\Delta_B(A_1^*(G))) \subset \langle f_a \mid a \in B \rangle$;

andererseits hat man wegen $A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) = \tilde{\mathcal{F}}_0(\text{Kern } \hat{\mu}_G)$ für $f \in \langle f_a \mid a \in B \rangle$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{v=1}^r f_{a_v} \circ \tilde{\mathcal{F}}_0(S_v) \text{ für geeignete } S_1, \dots, S_r \in A_1^*(G), a_1, \dots, a_r \in B \\ &= \tilde{\mathcal{F}}_0\left(\sum_{v=1}^r S_v - a_v S_v\right) ; \text{ also gilt auch } \langle f_a \mid a \in B \rangle \subset \tilde{\mathcal{F}}_0(\Delta_B(A_1^*(G))) \end{aligned}$$

Wegen (2.3.7) und $A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) = \tilde{\mathcal{F}}_0(\text{Kern } \hat{\mu}_G)$ folgt für $B \subset G$:

(2.3.8) Die Aussagen

$$a) \quad \Delta_B(A_1^*(G)) = \text{Kern } \hat{\mu}_G$$

und

$$b) \quad \langle f_a \mid a \in B \rangle = A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) .$$

sind äquivalent .

Ist G eine beliebige profinite Gruppe , so gilt :

(2.3.9) $a \in G \implies f_a (= \tilde{\mathcal{F}}_0(id - a))$ ist ein Element von $A_p^1(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ (f_a wie oben, p^1 wie in (2.2.12)) .

Für $B \subset G$ folgt entsprechend zu (2.3.7) :

1) zu "Rechtsideal" vgl. Fußnote zu (1.1.25) .

($\tilde{F}$ bezeichne jetzt die Fouriertransformation auf $\mathcal{D}'(G)$ wie in (2.2.12)).

(2.3.10) $\tilde{F}(\Delta_B(\mathcal{D}'(G))) = \langle f_a \mid a \in B \rangle$ (hier werde unter $\langle f_a \mid a \in B \rangle$ das von $\{f_a \mid a \in B\}$ in $\mathcal{A}_P^1(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ erzeugte Rechtsideal verstanden) .

Wegen (2.3.10) und $\mathcal{A}_P^1(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) = \tilde{F}(\text{Kern } \tilde{\mu}_G)$ ((2.2.13)b)) erhält man deshalb folgende Äquivalenz :

(2.3.11) Sei G eine beliebige profinite Gruppe , $B \subset G'$.

Dann sind die Aussagen

a) $\Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$

und

b) $\langle f_a \mid a \in B \rangle = \mathcal{A}_P^1(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$
gleichwertig.

Man kann daher im Fall einer kompakten abelschen oder profiniten Gruppe das LILF-Problem auf $\mathcal{D}'(G)$ bzw. für beliebiges kompaktes G das LILF-Problem auf $\mathcal{A}_1'(G)$ lösen, wenn man ein Kriterium zur Verfügung hat, wann das von einer Teilmenge Y von $\mathcal{A}_P(S)$ in $\mathcal{A}_P(S)$ erzeugte (Rechts)Ideal gleich $\mathcal{A}_P(S)$ ist (für passende P und S) .

Zunächst stellen wir einige im weiteren benötigte Grundtatsachen über Ringe mit Einselement und ihre Rechtsideale zusammen:

(2.3.12) Definition

Sei R ein Ring mit Einselement 1_R , $Y \subset R$, $Y \neq \emptyset$.

$$\langle Y \rangle_R := \bigcap \{ I \subset R \mid I \text{ Rechtsideal von } R, I \supset Y \}.$$

(2.3.13) Bemerkung

Sei R ein Ring mit Einselement 1_R , $Y \subset R$, $Y \neq \emptyset$.

Dann gilt:

$\langle Y \rangle_R$ ist ein Rechtsideal von R mit $Y \subset \langle Y \rangle_R$,

$$\langle Y \rangle_R = \left\{ \sum_{v=1}^r f_v g_v \mid r \in \mathbb{N}^*, f_v \in Y, g_v \in R \text{ für } 1 \leq v \leq r \right\}.$$

Ist I ein Ideal von R mit Einselement 1_I , so folgt aus $Y \subset I$:

$$\langle Y \rangle_R = \langle Y \rangle_I.$$

Beweis:

Der erste Teil der Behauptung ist offensichtlich.

Sei I ein Ideal von R mit Einselement 1_I und $Y \subset I$.

Wir zeigen: $\langle Y \rangle_R \subset \langle Y \rangle_I$ (woraus $\langle Y \rangle_R = \langle Y \rangle_I$ trivialerweise folgt).

Sei dazu $r \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_r \in Y$, $g_1, \dots, g_r \in R$. Dann folgt:

$$h := \sum_{v=1}^r f_v g_v = \sum_{v=1}^r (f_v 1_I) g_v = \sum_{v=1}^r f_v (1_I g_v) \in \langle Y \rangle_I,$$

da $1_I g_v \in I$ für alle $v \in \{1, \dots, r\}$; d.h. $\langle Y \rangle_R \subset \langle Y \rangle_I$.

(2.3.14) Bemerkung

Sei R ein Ring mit Einselement 1_R , $Y \subset R$, $Y \neq \emptyset$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\langle Y \rangle_R = R$

b) $1_R \in \langle Y \rangle_R$

c) $\exists_{f_1, \dots, f_r \in Y} \langle f_1, \dots, f_r \rangle_R := \langle \{f_1, \dots, f_r\} \rangle_R = R$

Beweis:

"a) $\Rightarrow$ b)" ist klar.

"b) $\Rightarrow$ c)": Sei $f \in R$. Wegen b) gibt es $f_1, \dots, f_r \in Y, g_1, \dots, g_r \in R$ mit $1_R = \sum_{v=1}^r f_v g_v$. Deshalb: $f = 1_R f = (\sum_{v=1}^r f_v g_v) f =$

$$= \sum_{v=1}^r f_v (g_v f) \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_R.$$

"c) $\Rightarrow$ a)" ist klar.

Sei Σ eine Indexmenge, $(H_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ eine Familie von endlichdimensionalen Hilberträumen. $(A, \preceq)$ sei eine gerichtete Menge, $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Teilmengen von Σ mit $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$ für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \preceq \beta$, $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$.

Zu jedem $\alpha \in A$ seien $p_\alpha: \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+$, $S_\alpha \subset \Sigma_\alpha$ vorgegeben, so daß (2.1.6) und (2.1.7) erfüllt sind. Seien S, P und $\mathcal{A}_P(S)$ wie in (2.1.9).

Das nun folgende Erzeugungstheorem für $\mathcal{A}_p(S)$ wurde durch das von Meisters und Kregelius Petersen (in Meisters/Kregelius Petersen [1] und Kregelius Petersen [1]) zur Lösung des LILF-Problems auf $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ verwendete Erzeugungstheorem von Hörmander für gewisse Ringe $\mathcal{A}_p(\Omega)$ von analytischen Funktionen angeregt (siehe Hörmander [1], Theorem 1); für den Fall $\mathcal{A}_p(S) = \mathcal{A}_p(S_0)$ mit $S_0 \subset \mathbb{Z}$ und $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ stellt es eine "Diskretisierung" des Theorems von Hörmander dar.

Die folgende allgemeine Version des Theorems und der dazu angeführte Beweis stammen von J.Voigt.

(2.3.15) Erzeugungstheorem

Sei $\mathcal{A}_p(S)$ wie oben, $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ wie in (2.1.9).

Seien $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}_p(S)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $\langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{A}_p(S)} = \mathcal{A}_p(S)$.
- b) $\bigvee_{\alpha \in A} \langle T_\alpha(f_1), \dots, T_\alpha(f_r) \rangle_{\mathcal{A}_{p_\alpha}(\Sigma_\alpha)} = \mathcal{A}_{p_\alpha}(S_\alpha)$.
- c) $\bigvee_{\alpha \in A} \exists C_\alpha, b_\alpha > 0 \bigvee_{\alpha \in S_\alpha} \inf_{\substack{y \in H_\alpha \\ \|y\|_\alpha = 1}} \sum_{v=1}^r \|(f_v(\alpha))^*(y)\|_\alpha \geq C_\alpha e^{-b_\alpha p_\alpha(\alpha)}$ ("*" wie in (0.6)).

In den Beweis dieses Theorems (genauer: in den Beweis von "c) $\Rightarrow$ a)") geht sehr wesentlich folgender allgemeine Satz über Hilberträume ein:

(2.3.16) Satz

Sei H ein Hilbertraum, $g_1, \dots, g_r \in B(H)$, $r \in \mathbb{N}^*$.

Es gelte $\delta := \inf_{\substack{y \in H \\ \|y\|=1}} \left(\sum_{v=1}^r \|g_v(y)\|^2 \right)^{1/2} > 0$.

Dann gibt es $h_1, \dots, h_r \in B(H)$ mit $\|h_v\| \leq \delta^{-1}$ für alle $v \in \{1, \dots, r\}$, so daß gilt:

$$\text{id}_H = \sum_{v=1}^r h_v \circ g_v.$$

Beweis:

Sei $\bigoplus_{\nu=1}^r H$ die r -fache Hilbertraumsumme (siehe (0.6)).

$\hat{g}: H \longrightarrow \bigoplus_{\nu=1}^r H$ sei definiert durch:

$$\hat{g}(y) := (g_1(y), \dots, g_r(y)) \quad (y \in H).$$

Es gilt:

$$(*) \inf_{\substack{y \in H \\ \|y\|=1}} \|\hat{g}(y)\| = \inf_{\substack{y \in H \\ \|y\|=1}} \left(\sum_{\nu=1}^r \|g_{\nu}(y)\|^2 \right)^{1/2} = \delta > 0.$$

Aus (*) folgt:

$$(**) \quad \forall_{y \in H} \|y\| \leq \delta^{-1} \|\hat{g}(y)\|.$$

Aus (*) und (**) schließt man nun leicht, daß $\hat{g}(H)$ abgeschlossen in $\bigoplus_{\nu=1}^r H$ ist und daß der stetige lineare Operator $\tilde{g}: H \longrightarrow \hat{g}(H)$,

$y \longmapsto \hat{g}(y)$, stetig invertierbar ist mit:

$$\|\tilde{g}^{-1}\| \leq \delta^{-1}.$$

Sei $P: \bigoplus_{\nu=1}^r H \longrightarrow \hat{g}(H)$ die Orthogonalprojektion,

$$i_{\nu}: H \longrightarrow \bigoplus_{\nu=1}^r H, \quad y \longmapsto (y_1, \dots, y_r) \quad \text{mit } y_{\mu} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu \neq \nu \\ y & \text{falls } \mu = \nu \end{cases}$$

($\mu \in \{1, \dots, r\}$) sei die kanonische Injektion ($1 \leq \nu \leq r$).

Für $1 \leq \nu \leq r$ sei nun $h_{\nu} := \tilde{g}^{-1} \circ P \circ i_{\nu} \in B(H)$.

$h_1, \dots, h_r$ haben dann die gewünschten Eigenschaften:

$$\|h_{\nu}\| \leq \|\tilde{g}^{-1}\| \|P\| \|i_{\nu}\| \leq \delta^{-1} \quad (1 \leq \nu \leq r);$$

für $y \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^r h_{\nu} \circ g_{\nu} &= \sum_{\nu=1}^r (\tilde{g}^{-1} \circ P \circ i_{\nu}) \circ g_{\nu} = (\tilde{g}^{-1} \circ P) \circ \left(\sum_{\nu=1}^r i_{\nu} \circ g_{\nu} \right) = \\ &= \tilde{g}^{-1} \circ P \circ \hat{g} = \text{id}_H. \end{aligned}$$

Beweis von (2.3.15):

zu "a) $\Rightarrow$ b)": Sei $a \in A$. Wegen (2.3.14) (mit $R := \mathcal{A}_{p_a}(S_a)$) genügt es zu zeigen, daß gilt: $f_{S_a} \in \langle T_a(f_1), \dots, T_a(f_r) \rangle_{\mathcal{A}_{p_a}(S_a)} \subset \langle T_a(f_1), \dots, T_a(f_r) \rangle_{\mathcal{A}_{p_a}(S_a)}$.

Da $f_S \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{A}_p(S)} = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{A}_p(S)}$ ((2.1.10) und (2.3.13)):

$$f_S = \sum_{\nu=1}^r f_{\nu} \circ g_{\nu} \quad \text{für geeignete } g_1, \dots, g_r \in \mathcal{A}_p(S).$$

Man erhält: (wegen $S_a = \sum_{\alpha} \alpha \cap S$ nach (2.1.9))

$$f_{S_a} = T_a(f_S) = \sum_{\alpha=1}^r T_a(f_{\nu}) \circ T_a(g_{\nu}) \in \langle T_a(f_1), \dots, T_a(f_r) \rangle_{\mathcal{A}_{p_a}(S_a)}.$$

zu "b) $\Rightarrow$ c)": Es gelte b) . Sei $a \in A$.

Wegen $f_{S_a} \in \langle T_a(f_1), \dots, T_a(f_r) \rangle_{A_{p_a}(\Sigma_a)}$ gibt es $g_1, \dots, g_r \in A_{p_a}(\Sigma_a)$

$$\text{mit } f_{S_a} = \sum_{v=1}^r T_a(f_v) \circ g_v .$$

Für $\epsilon \in S_a$ erhält man:

$$\text{id} = \sum_{v=1}^r f_v(\epsilon) \circ g_v(\epsilon) ; \text{ da id selbstadjungiert ist , folgt}$$

$$\text{hieraus : id} = \sum_{v=1}^r (g_v(\epsilon))^*(f_v(\epsilon))^*$$

(für $h \in B(H_\epsilon)$ werde mit h^* die Adjungierte von h bezeichnet).

Es ergibt sich:

$$1 = \inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \| \text{id}(y) \|_\epsilon \leq \inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \sum_{v=1}^r \| (g_v(\epsilon))^*(f_v(\epsilon))^*(y) \|_\epsilon$$

$$\leq \inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \sum_{v=1}^r \| (g_v(\epsilon))^* \|^6 \| (f_v(\epsilon))^*(y) \|_\epsilon =$$

$$= \inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \sum_{v=1}^r \| g_v(\epsilon) \|^6 \| (f_v(\epsilon))^*(y) \|_\epsilon$$

(wegen $\|h^*\|^6 = \|h\|^6$ für $h \in B(H_\epsilon)$) .

Da alle g_v ($1 \leq v \leq r$) in $A_{p_a}(\Sigma_a)$ sind , gibt es $\tilde{C}, \tilde{b} > 0$ mit:

$$\| g_v(\epsilon) \|^6 \leq \tilde{C} \tilde{b}_{p_a}(\epsilon) \text{ für alle } \epsilon \in \Sigma_a, 1 \leq v \leq r .$$

Aus obiger Ungleichungskette folgt daher :

$$1 \leq \tilde{C} \tilde{b}_{p_a}(\epsilon) \inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \sum_{v=1}^r \| (f_v(\epsilon))^*(y) \|_\epsilon .$$

Mit $C_a := \tilde{C}^{-1}$, $b_a := \tilde{b}$ folgt die Behauptung .

zu "c) $\Rightarrow$ a)": Es genügt zu zeigen : $f_S \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{A_p(\Sigma)}$.

Sei $\epsilon \in S$. Wegen $S = \bigcup_{a \in A} S_a$ gibt es ein $a \in A$ mit $\epsilon \in S_a$.

Aus c) folgt : $(f_1(\epsilon))^*, \dots, (f_r(\epsilon))^*$ erfüllen die Voraussetzungen von (2.3.16) mit $H := H_\epsilon$, $g_v := (f_v(\epsilon))^*$ ($1 \leq v \leq r$) .

Daher gibt es $h_1^{(\epsilon)}, \dots, h_r^{(\epsilon)} \in B(H_\epsilon)$, so daß gilt :

$$\text{id}_{H_\epsilon} = \sum_{v=1}^r h_v^{(\epsilon)} \circ (f_v(\epsilon))^* \text{ und}$$

$$\| h_v^{(\epsilon)} \|^6 \leq \left(\inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \sum_{v=1}^r \| (f_v(\epsilon))^*(y) \|_\epsilon^2 \right)^{1/2} \text{ für alle } v \in \{1, \dots, r\} .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{id}_{H_6} &= (\text{id}_{H_6})^* = \left(\sum_{v=1}^r h_v^{(6)} \circ (f_v^{(6)})^* \right)^* = \\ &= \sum_{v=1}^r f_v^{(6)} \circ (h_v^{(6)})^* . \end{aligned}$$

Wegen obiger Abschätzung für $\|h_v^{(6)}\|^6$ ($1 \leq v \leq r$) erhält man:

$$\begin{aligned} \|(h_v^{(6)})^*\|^6 &= \|h_v^{(6)}\|^6 \leq r \left(\inf_{\substack{y \in H_6 \\ \|y\|_6=1}} \|(f_v^{(6)})^*(y)\|_6 \right)^{-1} \leq \\ &\leq r C_\alpha^{-1} e^{b_\alpha p_\alpha(6)} . \end{aligned}$$

Für $6 \notin S$ definieren wir:

$$h_v^{(6)} := 0 \quad (1 \leq v \leq r) .$$

Offenbar gilt dann für

$$\begin{aligned} \tilde{h}_v &:= ((h_v^{(6)})^*)_{6 \in \Sigma} \in \prod_{6 \in \Sigma} B(H_6) : \\ \tilde{h}_v &\in \mathcal{A}_p(\Sigma) \quad (\text{für } 1 \leq v \leq r) \quad \text{und} \\ \sum_{v=1}^r f_v \circ \tilde{h}_v &= f_S . \end{aligned}$$

(2.3.17) Bemerkungen

Voraussetzungen wie in (2.3.15) .

a) Erfüllen $f_1, \dots, f_r$ die Bedingung

$$(*) \quad \forall \alpha \in A \quad \exists C_\alpha, b_\alpha > 0 \quad \forall 6 \in S_\alpha \quad \exists v \in \{1, \dots, r\} \quad \inf_{\substack{y \in H_6 \\ \|y\|_6=1}} \|(f_v^{(6)})^*(y)\| \geq C_\alpha e^{-b_\alpha p_\alpha(6)} ,$$

so folgt hieraus :

$$1) \quad f_1, \dots, f_r \text{ erfüllen (2.3.15)c) , d.h. } \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{A}_p(\Sigma)} = \mathcal{A}_p(S) .$$

$$2) \quad \forall 6 \in S \quad \exists v \in \{1, \dots, r\} \quad f_v^{(6)} \text{ invertierbar .}$$

Sind alle H_6 eindimensional oder $r=1$, so stimmen offenbar die Bedingungen (*) und (2.3.15)c) überein . Dies trifft jedoch im allgemeinen Fall nicht zu (vgl. Fußnote zu (3.1.3)d)) .

b) Es gelte :

$$\forall \alpha \in A \quad S_\alpha \text{ endlich , } p_\alpha \equiv 0 .$$

Dann sind für $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}_p(S)$ die Bedingungen (*) und 2) aus a) äquivalent.

Beweis:

zu a) : Daß (2.3.15)c) aus (*) folgt , ist offensichtlich .
Daher ist 1) erfüllt , wenn (*) gilt .

Weiter folgt aus (*) :

$$\bigvee_{\sigma \in S} \bigvee_{v \in \{1, \dots, r\}} \exists \inf_{\substack{y \in H_\sigma \\ \|y\|_\sigma = 1}} \|(f_v(\sigma))^*(y)\|_\sigma > 0$$

und damit :

$$\bigvee_{\sigma \in S} \bigvee_{v \in \{1, \dots, r\}} \exists (f_v(\sigma))^* \text{ invertierbar ;}$$

d.h. auch 2) ergibt sich aus (*) .

zu b) : Es bleibt nur noch zu zeigen (wegen a)) , daß aus
2) (*) folgt , wenn S_α und p_α ($\alpha \in A$) wie angegeben sind .
Da alle S_α ($\alpha \in A$) endlich sind , genügt es zu zeigen , daß
 $\inf_{\substack{y \in H_\sigma \\ \|y\|_\sigma = 1}} \|(f_v(\sigma))^*(y)\|_\sigma > 0$ für alle $\sigma \in S$.

Sei also $\sigma \in S$.

Nach 2) gibt es ein $v \in \{1, \dots, r\}$ so, daß $f_v(\sigma)$ invertierbar ist.
Dann ist aber auch $(f_v(\sigma))^*$ invertierbar .

Für $z \in H_\sigma$ gilt dann :

$$\|((f_v(\sigma))^*)^{-1}(z)\|_\sigma \leq \|((f_v(\sigma))^*)^{-1}\|_\sigma^6 \|z\|_\sigma , \text{ woraus folgt :}$$

$$0 < (\|((f_v(\sigma))^*)^{-1}\|_\sigma^6)^{-1} \leq \frac{\|(f_v(\sigma))^*(y)\|_\sigma}{\|y\|_\sigma} \text{ für alle } y \in H_\sigma ,$$

$$\text{also auch } 0 < \inf_{\substack{y \in H_\sigma \\ \|y\|_\sigma = 1}} \|(f_v(\sigma))^*(y)\|_\sigma .$$

§3 Nicht gleichzeitig P-approximierbare Elemente von LK-Gruppen

Aus (2.3.4) und (2.3.15) folgt für $G=T$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$,
 $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $k \mapsto \ln(1+|k|)$:

$$\begin{aligned} (3.0.1) \quad \Delta_{\{a_1', \dots, a_r'\}}(\mathcal{D}'(T)) &= \text{Kern } \tilde{\mu}_T \quad (a_v' := \pi_{\mathbb{Z}}(a_v) \quad (1 \leq v \leq r)) \\ &\iff \langle f_{a_1'}, \dots, f_{a_r'} \rangle_{\mathcal{A}_p(\mathbb{Z})} = \mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \\ &\quad (f_{a_i'} \text{ wie in (2.3.1)}) \\ &\iff \exists_{C, b > 0} \forall_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} |1 - e^{-2\pi i k a_v'}| \geq C(1+|k|)^{-b}. \end{aligned}$$

Setzen wir $\|x\| := \min\{|x - 1| \mid 1 \in \mathbb{Z}\}$ für $x \in \mathbb{R}$, so gelten die folgenden Ungleichungen:

$$(3.0.2) \quad 4 \|x\| \leq |1 - e^{-2\pi i x}| \leq 2\pi \|x\| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aus (3.0.1) folgt daher leicht, daß die Aussagen

$$(3.0.3) \quad a) \quad \Delta_{\{a_1', \dots, a_r'\}}(\mathcal{D}'(T)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_T$$

und

$$b) \quad \exists_{C, b > 0} \forall_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \forall_{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z}} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} |ka_v' - h_v| \geq C(1+|k|)^{-b}$$

äquivalent sind. Die Aussage (3.0.3)b) besagt dabei gerade, daß die Zahlen $a_1, \dots, a_r$ "nicht gleichzeitig schnell approximierbar" sind; diese Eigenschaft wurde in Kregelius Petersen [1] definiert, um diejenigen endlichen Zahlenfolgen $b_1, \dots, b_s$ in $\mathbb{R}$ zu beschreiben, für die $\Delta_{\{1, b_1, \dots, b_s\}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R})) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{\mathbb{R}}$ gilt.

Ist G eine beliebige kompakte abelsche oder eine profinite Gruppe, so erhält man ebenfalls aus (2.3.15) eine Charakterisierung derjenigen $a_1, \dots, a_r \in G$, für die $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ erfüllt ist (siehe (2.3.4) bzw. (2.3.11)).

Für eine beliebige kompakte Gruppe G liefert weiter (2.3.15) eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, wann für eine endliche Teilmenge B von G $\Delta_B(A_1'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ gilt (siehe (2.3.8)) .

Ist B eine beliebige Teilmenge einer kompakten abelschen oder einer profiniten Gruppe G , so folgt aus (2.3.4) bzw. (2.3.11) und (2.3.14) , daß die Aussagen

$$(3.0.4)a) \Delta_B(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$$

und

$$b) \exists a_1, \dots, a_r \in B \quad \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$$

äquivalent sind. Entsprechend sind für eine Teilmenge B einer beliebigen kompakten Gruppe

$$(3.0.5)a) \Delta_B(A_1'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$$

und

$$b) \exists a_1, \dots, a_r \in B \quad \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$$

gleichbedeutend.

Es genügt deshalb, jeweils nur endliche Teilmengen $B = \{a_1, \dots, a_r\}$ der Gruppe G zu betrachten und zu untersuchen, wann $a_1, \dots, a_r$ die wegen (2.3.15)c) erforderlichen "Approximierbarkeitseigenschaften" aufweisen.

3.1 Nicht-gleichzeitige P-Approximierbarkeit von Elementen kompakter Gruppen

Sei G eine kompakte Gruppe, Σ ihr duales Objekt. Sei $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Teilmengen von Σ , wobei A eine gerichtete Menge ist und $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$ (2.1.5) erfüllt. Zu jedem $\alpha \in A$ seien $p_\alpha: \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $S_\alpha \subset \Sigma_\alpha$ vorgegeben, so daß (2.1.6) und (2.1.7) gelten.

Sei $S := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$, $P := (p_\alpha)_{\alpha \in A}$.

(3.1.1) Definition und Satz

Voraussetzungen wie oben.

Seien $a_1, \dots, a_r \in G$.

$a_1, \dots, a_r$ heißen auf S nicht gleichzeitig P-approximierbar (n.g.a.-(P,S)), wenn mit einem (geeigneten) Repräsentantensystem $\mathcal{U} = (U^{(\sigma)})_{\sigma \in \Sigma}$ von Σ gilt:

$$\forall \alpha \in A \quad \exists C_\alpha, b_\alpha > 0 \quad \forall \sigma \in S_\alpha \quad \inf_{\substack{y \in H_\sigma \\ \|y\|_\sigma = 1}} \sum_{j=1}^r \|(\text{id} - U_{a_j}^{(\sigma)})(y)\|_\sigma \geq C_\alpha e^{-b_\alpha p_\alpha(\sigma)}$$

(Bezeichnungen wie in (0.7) und (2.1.2)).

Die letztere Bedingung hängt nicht von der Wahl von $\mathcal{U}$ ab.

Sei $A = \{\alpha\}: a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P,S)} : \Leftrightarrow a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P,S)}$.

Beweis:

Wir zeigen, daß für äquivalente irreduzible unitäre Darstellungen $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ mit den Darstellungsräumen H_1 und H_2 und Elementen $a_1, \dots, a_r \in G$ gilt:

$$\inf_{\substack{y \in H_1 \\ \|y\|_1 = 1}} \sum_{j=1}^r \|(\text{id} - U_{a_j}^{(1)})(y)\|_1 = \inf_{\substack{y \in H_2 \\ \|y\|_2 = 1}} \sum_{j=1}^r \|(\text{id} - U_{a_j}^{(2)})(y)\|_2$$

($\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_2$ seien die Normen auf H_1 bzw. H_2).

Da $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ äquivalent sind, sind auch $\bar{U}^{(1)}$ und $\bar{U}^{(2)}$ äquivalent (siehe (0.7)).

Sei $I : H_1 \rightarrow H_2$ ein isometrischer Isomorphismus mit
 $\bar{U}_a^{(1)} = I^{-1} \cdot \bar{U}_a^{(2)} \cdot I$ für alle $a \in G$.

Dann gilt wegen $I(\{y \in H_1 \mid \|y\|_1 = 1\}) = \{y \in H_2 \mid \|y\|_2 = 1\}$:

$$\begin{aligned} & \inf_{\substack{y \in H_2 \\ \|y\|_2 = 1}} \sum_{v=1}^r \|(\text{id} - \bar{U}_{a_v}^{(2)})(y)\|_2 = \\ &= \inf_{\substack{y \in H_1 \\ \|y\|_1 = 1}} \sum_{v=1}^r \|(\text{id} - \bar{U}_{a_v}^{(2)})(I(y))\|_2 = \\ &= \inf_{\substack{y \in H_1 \\ \|y\|_1 = 1}} \sum_{v=1}^r \|I^{-1}((\text{id} - \bar{U}_{a_v}^{(2)})(I(y)))\|_1 = \\ &= \inf_{\substack{y \in H_1 \\ \|y\|_1 = 1}} \sum_{v=1}^r \|(\text{id} - \bar{U}_{a_v}^{(1)})(y)\|_1. \end{aligned}$$

(3.1.2) Beispiel

Sei G eine beliebige kompakte Gruppe, Σ das duale Objekt von G . Wie in (2.1.8) sei G als projektiver Limes von LIE-Gruppen dargestellt:

$$G = \text{proj} \lim_{\substack{\alpha, \beta \in A \\ \alpha \leq \beta}} (A/G/H_\alpha, \text{pr}_{\alpha\beta}) \quad \text{mit } A, (H_\alpha)_{\alpha \in A}, (\text{pr}_{\alpha\beta})_{\substack{\alpha, \beta \in A \\ \alpha \leq \beta}} \text{ wie in (2.1.8)}.$$

Für $\alpha \in A$ bezeichne Σ_{G/H_α} das duale Objekt von G/H_α .

Die Abbildung

$$i_\alpha : \Sigma_{G/H_\alpha} \rightarrow \Sigma, \epsilon \mapsto \tilde{\epsilon} \quad \text{mit } \tilde{\epsilon} = \{\tilde{U} \mid U \in \epsilon\},$$

wobei $\tilde{U}_x := U_{\text{pr}_\alpha(x)}$ (für $x \in G, U \in \epsilon$)
 (pr_α wie in (2.1.8)) ,

induziert für jedes $\alpha \in A$ eine Bijektion ψ_α von Σ_{G/H_α} auf Σ_α (Σ_α wie in (2.1.8)), die die triviale Darstellung in die triviale überführt (vgl. Hewitt/Ross [2], (28.10)).

Sei $P = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $p_\alpha : \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($\alpha \in A$) so, daß (2.1.7) erfüllt ist.

Wie in (2.1.8) sei $S_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \{\epsilon_0\}$ für alle $\alpha \in A$.

$$\text{Sei } S := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha.$$

Für $a_1, \dots, a_r \in G$ gilt dann offenbar :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.}-(P, S) \iff \\ \iff \bigvee_{\alpha \in A} \text{pr}_{\alpha}(a_1), \dots, \text{pr}_{\alpha}(a_r) \text{ n.g.a.}-(p_{\alpha} \circ \varphi_{\alpha}, \Sigma_{G/H_{\alpha}} \setminus \{e_0\}) \end{array} \right.$$

Sei jetzt G abelsch .

Identifiziert man nun bei allen vorkommenden Gruppen die dualen Objekte (elementweise) mit den entsprechenden Dualgruppen, so stimmt für jedes $\alpha \in A$ die oben definierte Abbildung i_{α} mit dem Monomorphismus i_{α} aus (2.1.8) überein.

Für alle $\alpha \in A$ gilt:

$G_{\alpha} := G/H_{\alpha} \cong T^{n_{\alpha}} \times F_{\alpha}$ für geeignete $n_{\alpha} \in \mathbb{N}$, F_{α} endliche abelsche Gruppe (vgl. (2.1.8)) .

Wie in (2.1.8) identifizieren wir wieder $\hat{G}_{\alpha}$ mit $\mathbb{Z}^{n_{\alpha}} \times F_{\alpha}$ (für $\alpha \in A$) .

Sei $\alpha \in A$.

Sei $p'_{\alpha} : \hat{G}_{\alpha} = \mathbb{Z}^{n_{\alpha}} \times F_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(k, x) \mapsto \ln(1+|k|)$.

Für $c_1, \dots, c_r \in G_{\alpha}$ gilt :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} c_1, \dots, c_r \text{ n.g.a.}-(p'_{\alpha}, \hat{G}_{\alpha} \setminus \{(0,0)\}) \iff \\ \iff \exists_{C_{\alpha}, b_{\alpha} > 0} (k, x) \in \hat{G}_{\alpha} \setminus \{(0,0)\} \sum_{v=1}^r |1 - [c_v, (k, x)]| \geq C_{\alpha} (1+|k|)^{-b_{\alpha}} \\ \text{(zu "[.,.]"} \text{ vgl. (0.10))} \\ \iff \exists_{C_{\alpha}, b_{\alpha} > 0} (k, x) \in \hat{G}_{\alpha} \setminus \{(0,0)\} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} |1 - [c_v, (k, x)]| \geq C_{\alpha} (1+|k|)^{-b_{\alpha}} \end{array} \right.$$

Sei $P := (p_{\alpha})_{\alpha \in A}$ mit $p_{\alpha} : i_{\alpha}(\hat{G}_{\alpha}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i_{\alpha}(k, x) \mapsto p'_{\alpha}(k, x)$ für $\alpha \in A$.

Aus (2.2.5) folgt , daß damit die Voraussetzungen für (3.1.1) erfüllt sind.

Für $a_1, \dots, a_r \in G$ gilt nun wegen (1) und (2) :

$$\begin{aligned} & a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.}-(P, \hat{G} \setminus \{e\}) \iff \\ & \iff \bigvee_{\alpha \in A} \text{pr}_{\alpha}(a_1), \dots, \text{pr}_{\alpha}(a_r) \text{ n.g.a.}-(p_{\alpha} \circ \varphi_{\alpha}, \hat{G}_{\alpha} \setminus \{(0,0)\}) \\ & \iff \bigvee_{\alpha \in A} \text{pr}_{\alpha}(a_1), \dots, \text{pr}_{\alpha}(a_r) \text{ n.g.a.}-(p'_{\alpha}, \hat{G}_{\alpha} \setminus \{(0,0)\}) \\ & \iff \bigvee_{\alpha \in A} \exists_{C_{\alpha}, b_{\alpha} > 0} (k, x) \in \hat{G}_{\alpha} \setminus \{(0,0)\} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} |1 - [\text{pr}_{\alpha}(a_v), (k, x)]| \geq C_{\alpha} (1+|k|)^{-b_{\alpha}} \end{aligned}$$

(3.1.3) Bemerkungen

Sei G eine beliebige kompakte Gruppe, Σ ihr duales Objekt.

Seien $(\sum \alpha)_{\alpha \in A}$, $(S_{\alpha})_{\alpha \in A}$, $P = (p_{\alpha})_{\alpha \in A}$, S wie in (3.1.1), $(U^{(\epsilon)})_{\epsilon \in \Sigma}$ ein Repräsentantensystem von Σ , $a_1, \dots, a_r \in G$ ($r \in \mathbb{N}$).

a) Sind $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(P,S), so gilt für $\epsilon \in S$:

$U_{a_1}^{(\epsilon)}, \dots, U_{a_r}^{(\epsilon)}$ besitzen keinen gemeinsamen Eigenvektor zum Eigenwert 1; insbesondere gilt: $\epsilon \neq \epsilon_0$.

Beweis:

Wegen $S = \bigcup_{\alpha \in A} S_{\alpha}$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\epsilon \in S_{\alpha}$.

Annahme:

$U_{a_1}^{(\epsilon)}, \dots, U_{a_r}^{(\epsilon)}$ besitzen einen gemeinsamen Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Dann besitzen auch $\bar{U}_{a_1}^{(\epsilon)}, \dots, \bar{U}_{a_r}^{(\epsilon)}$ einen gemeinsamen Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Es folgt:

$$\sum_{v=1}^r \|(id - \bar{U}_{a_v}^{(\epsilon)})(z)\|_{\epsilon} = 0.$$

Dies liefert jedoch einen Widerspruch zu der Bedingung aus (3.1.1).

b) Aus (2.3.17) ergibt sich eine hinreichende Bedingung für $a_1, \dots, a_r$, n.g.a.-(P,S) zu sein:

Erfüllen $a_1, \dots, a_r$ die Bedingung:

$$(*) \quad \forall_{\alpha \in A} \exists_{C_{\alpha}, b_{\alpha} > 0} \forall_{\epsilon \in S_{\alpha}} \forall_{v \in \{1, \dots, r\}} \exists_{\substack{y \in H_{\epsilon} \\ \|y\|_{\epsilon} = 1}} \inf \| (id - \bar{U}_{a_v}^{(\epsilon)})(y) \|_{\epsilon} \geq C_{\alpha} e^{-b_{\alpha} p_{\alpha}(\epsilon)},$$

so ist (3.1.1) erfüllt:

Setzt man $f_v := (f_v(\epsilon))_{\epsilon \in \Sigma} := (id - \bar{U}_{a_v}^{(\epsilon)})_{\epsilon \in \Sigma}$ ($1 \leq v \leq r$), so gilt: $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) \subset \mathcal{A}_P(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ (vgl. (2.3.5)). Mit (2.3.17) ergibt sich, daß aus (*) die Bedingung von (3.1.1) folgt.

Sind alle H_{ϵ} ($\epsilon \in S$) eindimensional oder $r=1$, so ist (*) äquivalent zu der Bedingung aus (3.1.1) (vgl. (2.3.17)).

Insbesondere folgt aus der Gültigkeit von (*) für alle $\epsilon \in S$:

$$\exists_{v \in \{1, \dots, r\}} U_{a_v}^{(\epsilon)} \text{ besitzt nicht den Eigenwert } 1$$

(man vergleiche mit a):

aus " $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(P,S)" ergibt sich eine schwächere Folgerung).

c) Gilt für alle $\alpha \in A$:

S_α endlich , $p_\alpha \neq 0$,

so hat man offenbar folgende Äquivalenz :

$$a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P,S)} \iff$$

$$\iff \bigvee_{\epsilon \in S} U_{a_1}^{(\epsilon)}, \dots, U_{a_r}^{(\epsilon)} \text{ besitzen keinen gemeinsamen Eigenvektor zum Eigenwert } 1$$

Insbesondere sind also in diesem Fall $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(P,S), wenn gilt :

$$\bigvee_{\epsilon \in S} \exists U_{a_i}^{(\epsilon)} \text{ hat nicht den Eigenwert } 1$$

d) Ist G eine endliche Gruppe , so folgt aus c) für $a_1, \dots, a_r \in G$ und $S \subset \Sigma$:

$$a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(0,S)} \iff$$

$$\iff \bigvee_{\epsilon \in S} U_{a_1}^{(\epsilon)}, \dots, U_{a_r}^{(\epsilon)} \text{ besitzen keinen gemeinsamen Eigenvektor zum Eigenwert } 1$$

Als Beispiel betrachten wir $G := S(3)$.

Dann gilt $\Sigma = \{\epsilon_0, \omega, \epsilon\}$, wobei ω ein Charakter ist und ϵ eine Klasse von 2-dimensionalen Darstellungen ist (vgl. Hewitt/Ross [2] , (27.61)) .

Man hat : (Bezeichnungen siehe Hewitt/Ross [2] , (27.59))

$\omega((12)) = -1$, $U_{(123)}^{(\epsilon)}$ hat nicht den Eigenwert 1 (für $U^{(\epsilon)} \in \epsilon$) (Hewitt/Ross [2] , (27.61)) ; (12) , (123) sind daher n.g.a.-(0, $\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}$) . Weder (12) noch (123) ist selbst n.g.a.-(0, $\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}$) : da $\omega((123)) = 1$ und $U_{(12)}^{(\epsilon)}$ ($U^{(\epsilon)} \in \epsilon$) den Eigenwert 1 besitzt.

Obwohl für $U^{(\epsilon)} \in \epsilon$ $U_{(12)}^{(\epsilon)}$, $U_{(13)}^{(\epsilon)}$ und $U_{(23)}^{(\epsilon)}$ den Eigenwert 1 besitzen , sind (12) , (13) , (23) n.g.a.-(0, $\Sigma \setminus \{\epsilon_0\}$) : dies wird aus (4.1.5) folgen .

Eine kompakte Gruppe G kann also wegen (3.1.3)a) keine n.g.a.-(P, Σ) Elemente haben . Auch im Fall $S = \Sigma \setminus \{\epsilon_0\}$ ist die Existenz von n.g.a.-(P,S) Elementen keineswegs garantiert:

(3.1.4) Satz

Sei G eine kompakte Gruppe , Σ , $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$, $P = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ wie in (3.1.1) , $S_\alpha := \Sigma_\alpha \setminus \{\epsilon_0\}$ ($\alpha \in A$). Dann erfüllt $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ (2.1.6) und es gilt $\Sigma \setminus \{\epsilon_0\} = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$.

1) $(\text{id} - U_{(12)}^{(\epsilon)})_{\epsilon \in \Sigma}$, $(\text{id} - U_{(13)}^{(\epsilon)})_{\epsilon \in \Sigma}$, $(\text{id} - U_{(23)}^{(\epsilon)})_{\epsilon \in \Sigma}$ erfüllen also (2.3.15)c) , aber nicht die Bedingung (*) aus (2.3.17) .

Besitzt G Elemente $a_1, \dots, a_r$, die n.g.a.- $(P, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ sind, so ist G polythetisch und es gilt: $\overline{N(\{a_1, \dots, a_r\})} = G$. (Zu "polythetisch" vgl. Kap.1, (4.5) Definition).

Beweis: Sei $(U^{(\epsilon)})_{\epsilon \in \Sigma}$ ein Repräsentantensystem von Σ .

Seien $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(P, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ Elemente von G .

Annahme: $\overline{N(\{a_1, \dots, a_r\})} = G$.

Aus Hewitt/Ross [1], (22.12) und Hewitt/Ross [2], (28.10) folgt dann:

Es gibt ein $\epsilon_1 \in \Sigma \setminus \{\epsilon_0\}$ mit $U_{a_v}^{(\epsilon_1)} = \text{id}$ für alle $1 \leq v \leq r$ (*).

Wegen $\Sigma = \bigcup_{a \in A} \Sigma_a$ gibt es ein $a_1 \in A$ mit $\epsilon_1 \in \Sigma_{a_1}$.

Da $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(P, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ sind, gibt es $C, b > 0$, sodaß gilt:

$$\forall_{\epsilon \in \Sigma_{a_1} \setminus \{\epsilon_0\}} \inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \sum_{v=1}^r \|(id - \bar{U}_{a_v}^{(\epsilon)})(y)\|_\epsilon \geq C e^{-b p_{a_1}(\epsilon)},$$

insbesondere also: $\inf_{\substack{y \in H_{\epsilon_1} \\ \|y\|_{\epsilon_1} = 1}} \sum_{v=1}^r \|(id - \bar{U}_{a_v}^{(\epsilon_1)})(y)\|_{\epsilon_1} > 0$.

Das ist jedoch ein Widerspruch zu (*).

Doch auch wenn G polythetisch ist, muß G keine n.g.a.- $(P, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ Elemente $a_1, \dots, a_r$ besitzen:

(3.1.5) Beispiel

Sei $G=T$. G ist polythetisch gemäß Hewitt/Ross [1], (25.15).

Es gibt kein $r \in \mathbb{N}^*$ und $a_1, \dots, a_r \in T$ mit

$a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(0, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, denn gemäß Schmidt [1],

Theorem 6A, gilt für alle $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}$:

$$\forall_{0 < C < 1} \exists_{k \in \mathbb{Z}} \exists_{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z}} \forall_{1 \leq v \leq r} |k b_v - h_v| \leq C, \text{ d.h.}$$

für $a_1, \dots, a_r \in T$ mit $a_v := \pi_{\mathbb{Z}}(b_v)$ ($1 \leq v \leq r$) ergibt sich:

$$\forall_{0 < \tilde{C} < 2\pi} \exists_{k \in \mathbb{Z}} \forall_{1 \leq v \leq r} |1 - [a_v, k]| = |1 - e^{-2\pi i k b_v}| \leq 2\pi [k b_v] \leq \tilde{C}; \quad (3.0.2)$$

$a_1, \dots, a_r$ sind daher nicht n.g.a.- $(0, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (siehe (3.1.2)(2)).

Insgesamt folgt aus der Surjektivität von $\pi_{\mathbb{Z}}$, daß T keine n.g.a.- $(0, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ Elemente $a_1, \dots, a_r$ besitzt.

(3.1.6) Bemerkung

Da die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \llbracket x \rrbracket$, offenbar auf den Mengen $x + \mathbb{Z}$ ($x \in \mathbb{R}$) konstant ist, kann man definieren:

$$\llbracket \pi_{\mathbb{Z}}(x) \rrbracket := \llbracket x \rrbracket \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Ist G eine kompakte abelsche Gruppe, $a_1, \dots, a_r \in G$, so ergibt sich hieraus, aus (3.1.2) und aus (3.0.2) folgende Äquivalenz (Voraussetzungen wie in (3.1.1)):

$$\begin{aligned} & a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P,S)} \iff \\ & \iff \forall_{a \in A} \exists_{c_a, b_a > 0} \forall_{\xi \in S_a} \forall_{v \in \{1, \dots, r\}} \llbracket \langle a_v, \xi \rangle \rrbracket \geq c_a e^{-b_a p_a(\xi)} \\ & (\langle a_v, \xi \rangle \quad (1 \leq v \leq r) \text{ wie in (0.10)}) . \end{aligned}$$

Im folgenden wollen wir uns nun mit dem Fall $G = T^n \times F$, wobei $n \in \mathbb{N}$, F eine endliche abelsche Gruppe ist, $P = (p)$ mit $p: \mathbb{Z}^n \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(k, x) \mapsto \ln(1 + |k|)$ und $S \subset \mathbb{Z}^n \times F$ beschäftigen. Aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (siehe z.B. Hewitt/Ross [1], (A.27)) folgt, daß F mit einem direkten Produkt $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ identifiziert werden kann, wobei $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ geeignete Primzahlpotenzen sind (mit $s \in \mathbb{N}^*$).

Es gilt folgender Satz:

(3.1.7) Satz

Sei $G = T^n \times F$, $F = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ mit Primzahlpotenzen $m_1, \dots, m_s$ ($n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}^*$). Wir identifizieren wieder $\hat{G}$ mit $\mathbb{Z}^n \times F$ 1).

Sei $S = (\mathbb{Z}^n \times F) \setminus \{(0, 0)\}$.

Dann gilt für alle $r \geq s$:

Es gibt $a_1, \dots, a_r \in G$ mit $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(p, S)
(mit p wie oben).

Um (3.1.7) zu beweisen, betrachten wir zunächst die Spezialfälle $F = \{0\}$ und $n = 0$. Zuerst zum Fall $F = \{0\}$, $n \neq 0$:

1) vgl. (2.1.8) und (3.1.2).

(3.1.8) Satz

Sei $G = \mathbb{T}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$,
 $k \mapsto \ln(1+|k|)$.

Dann gibt es ein $a \in \mathbb{T}^n$, so daß a n.g.a.-(p,S) ist.

Beweis:

Offenbar genügt es, den Fall $S = \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ zu untersuchen.

Für $a \in \mathbb{T}^n$ gilt mit $a = (\pi_{\mathbb{Z}}(a^1), \dots, \pi_{\mathbb{Z}}(a^n))$ für $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}$:
 a n.g.a.-(p,S) $\iff$

$$\iff \exists_{C,b>0} \forall_{\substack{k=(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n \\ k \neq 0}} \forall_{h \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{i=1}^n k_i a^i - h \right| \geq C(1+|k|)^{-b} (+)$$

Sind $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) algebraisch und sind $1, a^1, \dots, a^n$
 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, so folgt aus Schmidt [1], 7.1,
 daß $a^1, \dots, a^n$ (+) erfüllen, d.h. $a := (\pi_{\mathbb{Z}}(a^1), \dots, \pi_{\mathbb{Z}}(a^n))$ ist
 n.g.a.-(p,S).

(3.1.9) Bemerkungen

a) Der Fall $n=1$. Sei p wie oben.

Sei $d \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $a := \pi_{\mathbb{Z}}(d)$ n.g.a.-(p, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

genau dann, wenn d eine nicht-Liouvillesche irrationale
 Zahl ist, denn für $n=1$ lautet (+) im Beweis von (3.1.8):

$$\exists_{C,b>0} \forall_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \forall_{h \in \mathbb{Z}} |kd - h| \geq C(1+|k|)^{-b}.$$

Diese Aussage ist jedoch äquivalent dazu, daß d eine irrationale
 nicht-Liouvillesche Zahl ist (siehe beispielsweise
 Fischer/Sacher [1], S.219).

Sind $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, so gilt offenbar:

$a_1, \dots, a_r$ nicht gleichzeitig schnell approximierbar (gemäß
 der Definition von E.Kregelius Petersen (Kregelius Petersen
 [1]) genau dann, wenn $\pi_{\mathbb{Z}}(a_1), \dots, \pi_{\mathbb{Z}}(a_r) \in \mathbb{T}$ n.g.a.-
 (p, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$) sind.

- b) Aus (3.1.8) folgt trivialerweise, daß für jedes $r \in \mathbb{N}^*$
 $a_1, \dots, a_r \in T^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ beliebig) existieren, die n.g.a.-(p, S)
 sind (für $S \subseteq \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$).

Für $n \geq 1$ existieren aber auch $a_1, \dots, a_n \in T^n$ mit dieser
 Eigenschaft, so daß keine echte Teilmenge von $\{a_1, \dots, a_n\}$
 n.g.a.-(p, $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$) Elemente enthält:

Sei d eine irrationale nicht-Liouvillesche Zahl, $a := \pi_{\mathbb{Z}}(d)$.

Für $1 \leq \nu \leq n$ sei $a_\nu = (a_\nu^1, \dots, a_\nu^n)$ definiert durch:

$$a_\nu^\mu := \begin{cases} a & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \leq \mu \leq n) \quad . \text{ Sei } \nu \in \{1, \dots, n\} .$$

Dann gilt offenbar: $a_1, \dots, a_n$ sind n.g.a.-(p, $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$),
 während $a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$ diese Eigenschaft wegen
 (3.1.4) nicht besitzen (die von $a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$
 erzeugte Untergruppe von T^n ist in der abgeschlossenen Unter-
 gruppe $T^{\nu-1} \times \{0\} \times T^{n-\nu}$ enthalten).

- c) Sei $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_r \in T^n$. Dann gilt:

$a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(p, $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$) (p wie oben) $\implies$

die Projektionen $\text{pr}_J(a_1), \dots, \text{pr}_J(a_r)$ auf T^J

$(\text{pr}_J : T^n \rightarrow T^J, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_j)_{j \in J})$

sind n.g.a.-(p, $i_J, \mathbb{Z}^J \setminus \{0\}$), mit $i_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}^n$ kanonisch
 (für alle $J \subseteq \{1, \dots, n\}$)

- d) Sei p wie oben., $n \in \mathbb{N}^*$.

Aus $\{a_1, \dots, a_r\} = T^n$ für geeignete Elemente $a_1, \dots, a_r \in T^n$

folgt keineswegs, daß $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(p, $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$) sind

(die Umkehrung dieser Aussage ist nach (3.1.4) richtig):

Ist beispielsweise d eine irrationale Liouville-Zahl,

so erzeugen die Elemente $a_1, \dots, a_n$ mit $a_\nu = (a_\nu^1, \dots, a_\nu^n)$ und

$$a_\nu^\mu := \begin{cases} \pi_{\mathbb{Z}}(d) & \text{falls } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{für } 1 \leq \mu \leq n \text{ und } 1 \leq \nu \leq n)$$

T^n , während sie wegen a) und c) nicht n.g.a.-(p, $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$)
 sein können.

e) Im Beweis von (3.1.8) haben wir gesehen, daß für $a \in T^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) die Bedingung, daß die Komponenten $a^1, \dots, a^n$ von $a' \in \mathbb{R}^n$ mit $\pi_{\mathbb{Z}^n}(a') = a$ algebraisch sind und $1, a^1, \dots, a^n$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind, hinreichend dafür ist, daß a n.g.a.-($p, \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$) ist. Wir werden später sehen (vgl. (3.1.14)), daß diese Bedingung nicht notwendig ist: daß es nämlich für alle $n \in \mathbb{N}^*$ transzendente Zahlen $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $a' := \pi_{\mathbb{Z}^n}((a^1, \dots, a^n))$ n.g.a.-($p, \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$) ist. Notwendig ist jedoch die lineare Unabhängigkeit von $1, a^1, \dots, a^n$ über $\mathbb{Q}$. Allgemeiner gilt nämlich für $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}^*$: Seien $a_1, \dots, a_n \in T^n$ n.g.a.-($p, \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$), $a_v = \pi_{\mathbb{Z}^n}(a'_v)$, $a'_v \in \mathbb{R}^n$, $a'_v = (a_{v1}, \dots, a_{vn})$ ($1 \leq v \leq r$). Dann sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^n \end{pmatrix}, e_1, \dots, e_r \in \mathbb{R}^r \quad (e_1, \dots, e_r \text{ seien die}$$

kanonischen Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^r$) linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. (*)

Beweis:

Annahme:
$$\sum_{\mu=1}^n \frac{p_\mu}{q_\mu} \begin{pmatrix} a_1^\mu \\ \vdots \\ a_r^\mu \end{pmatrix} + \sum_{v=1}^r \frac{v_v}{s_v} e_v = 0 \quad \text{für}$$

$p_1, \dots, p_n, v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Z}$, die nicht alle verschwinden, und $q_1, \dots, q_n, s_1, \dots, s_r \in \mathbb{N}^*$.

Da $e_1, \dots, e_r$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind, kann man sofort annehmen, daß es ein $\mu_0 \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $p_{\mu_0} \neq 0$.

Es folgt für alle $1 \leq v \leq r$:

$$\sum_{\mu=1}^n \frac{p_\mu}{q_\mu} a_v^\mu + \frac{v_v}{s_v} = 0; \quad \text{man überlegt sich nun leicht, daß}$$

es wegen $p_{\mu_0} \neq 0$ ein $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ gibt, so daß für alle $1 \leq v \leq r$ $[[\langle k, a \rangle]] = [[\sum_{\mu=1}^n k_\mu a_v^\mu]] = 0$ gilt, was jedoch ein Widerspruch zu $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($p, \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$) ist.

f) Sei $n \in \mathbb{N}^*$.

Die Umkehrung von (*) ist i.a. falsch (Ein Gegenbeispiel liefern $a_1, \dots, a_n$ wie in d)).

Nun zum Fall $n = 0$; d.h. $G = F$, wobei F eine endliche abelsche Gruppe vom Typ $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ ($m_1, \dots, m_s$ Primzahlpotenzen) ist.

(3.1.10) Satz

Sei F eine endliche abelsche Gruppe. Dann gilt:

Wird F von $a_1, \dots, a_r \in F$ erzeugt, so sind $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(p, S) für alle $p : F \rightarrow \mathbb{R}_+$, $S \subset F \setminus \{0\}$ beliebig.

Beweis:

Seien $a_1, \dots, a_r \in F$, $[a_1, \dots, a_r] = F$. Sei $S := F \setminus \{0\} = \hat{F} \setminus \{0\}$, $x \in S$.

Wegen $x \neq 0$ gibt es ein $v_x \in \{1, \dots, r\}$ mit $\langle a_{v_x}, x \rangle \neq 0$.

Setzt man nun

$C := (\min \{ \langle a_{v_x}, x \rangle \mid x \in S \}) / (\max \{ e^{-p(x)} \mid x \in S \})$, so folgt:
 $\forall x \in S \quad \langle a_{v_x}, x \rangle \geq C e^{-p(x)}$ (vgl. (3.1.6)).

(3.1.11) Folgerung

Ist $F = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ ($m_1, \dots, m_s$ Primzahlpotenzen, $s \in \mathbb{N}^*$) so gibt es für alle $r \geq s$ n.g.a.-(p, S) Elemente $a_1, \dots, a_r \in F$, für beliebige $p : F \rightarrow \mathbb{R}_+$, $S \subset F \setminus \{0\}$.

Für den Beweis von (3.1.7) ist nun noch folgende Tatsache nützlich:

(3.1.12) Bemerkung

Sei $G = T^n \times F$, $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$.

Seien $a_1, \dots, a_r \in G$, $a_v = (a'_v, c_v)$ mit $a'_v \in T^n$, $c_v \in F$ ($1 \leq v \leq r$),
 $S := (\mathbb{Z}^n \times F) \setminus \{(0, 0)\}$, $S_1 := \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $S_2 := F \setminus \{0\}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-(p, S)
 (mit $p : \mathbb{Z}^n \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(k, x) \mapsto \ln(1 + |k|)$)

b) $a'_1, \dots, a'_r$ n.g.a.-(p_1, S_1)
 (mit $p_1 : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $k \mapsto \ln(1 + |k|)$)

und

$c_1, \dots, c_r$ n.g.a.-($0, S_2$)

Beweis: Offenbar gilt: $S = (S_1 \times F) \cup (\{0\} \times S_2)$.

zu "a) $\implies$ b)": klar, da $S_1 \times \{0\}, \{0\} \times S_2 \subset S$.

zu "b) $\implies$ a)": Aus b) folgt:

$$\exists_{C,b>0} \forall_{k \in S_1} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} \llbracket \langle a_v, k \rangle \rrbracket \geq C(1+|k|)^{-b} \quad (1)$$

$$\text{und } \exists_{C'>0} \forall_{x \in S_2} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} \llbracket \langle c_v, x \rangle \rrbracket \geq C' \quad (2)$$

Sei nun $(k, x) \in S_1 \times F$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $x = (\overline{1^1}, \dots, \overline{1^s})$ mit $1^j \in \{1, \dots, m_j - 1\}$, $1^j = 1^j + \mathbb{Z}$ für $1 \leq j \leq s$.

Wegen (1) folgt:

$$\begin{aligned} \text{Es gibt ein } v \in \{1, \dots, r\} \text{ mit} \\ \llbracket \langle a_v, k' \rangle \rrbracket &\geq C(1+|k'|)^{-b} \quad \text{für } k' := m_1 \dots m_s k \\ &= C(1+m|k|)^{-b} \quad m := m_1 \dots m_s \\ &\geq \frac{C}{(m+1)^b} (1+|k|)^{-b} \end{aligned} \quad (3)$$

Mit $c_v = (\overline{1^1_v}, \dots, \overline{1^s_v})$, $1^j \in \{0, \dots, m_j - 1\}$ ($1 \leq j \leq s$) folgt:

$$\begin{aligned} \llbracket \langle a_v, (k, x) \rangle \rrbracket &= \llbracket \langle a_v, c_v \rangle, (k, x) \rrbracket \\ &= \llbracket \langle a_v, k \rangle + \langle c_v, x \rangle \rrbracket = \quad (\text{siehe Hewitt/Ross [1], (23.27)d)}) \\ &= \left| \langle a_v, k \rangle + \sum_{j=1}^s \frac{1^j 1^j}{m_j} - h \right| \quad \text{für geeignetes } h \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{m} \left| \langle a_v, k \rangle + \sum_{j=1}^s 1^j 1^j \hat{m}_j - hm \right| \quad \text{mit } \hat{m}_j := \prod_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^s m_{j'}, \quad (1 \leq j \leq s) \\ &\geq \frac{1}{m} \llbracket \langle a_v, k' \rangle \rrbracket \\ &\geq \frac{C}{(m+1)^{b+1}} (1+|k|)^{-b} \end{aligned} \quad (4)$$

Sei andererseits $x \in S_2$, dann gilt wegen (2):

$$\llbracket \langle a_v, (0, x) \rangle \rrbracket = \llbracket \langle c_v, x \rangle \rrbracket \geq C' \quad \text{für geeignetes } v \in \{1, \dots, r\}.$$

Setzen wir daher $C_0 := \min\{C(m+1)^{-(b+1)}, C'\}$, so erhalten wir für jedes $(k, x) \in S$:

$$\llbracket \langle a_v, (k, x) \rangle \rrbracket \geq C_0 (1+|k|)^{-b} \quad \text{für ein passendes } v \in \{1, \dots, r\},$$

d.h. $a_1, \dots, a_r$ sind n.g.a.-(p, S).

Nun endlich zum

Beweis von (3.1.7):

Seien S_1, S_2, p_1 wie in (3.1.12).

Wegen (3.1.8) gibt es ein $a \in T^n$, a n.g.a.-(p_1, S_1) ; aus (3.1.11) folgt , daß es in F Elemente $c_1, \dots, c_s$ gibt, die n.g.a.-($0, S_2$) sind .

Sei $a_v := (a, c_v) \quad (1 \leq v \leq s)$.

Aus (3.1.12) erhalten wir ,daß $a_1, \dots, a_s$ n.g.a.-(p, S) sind.

Es folgen nun Beispiele von Gruppen , die spezielle projektive Limiten von Gruppen vom Typ $T^n \times F$ ($n \in \mathbb{N}$, F endliche abelsche Gruppe) sind.

(3.1.13) Beispiel

Sei I eine beliebige Indexmenge.

Dann gilt:

$T^I = \text{proj lim } (A, T^J, \text{pr}_{JJ}, (J, J' \in A, J \subset J'))$ mit $A := \{J \subset I \mid J \text{ endlich}\}$, denn wegen (1.1.2) ist

$\mathcal{A} := \{T^{I \setminus J} \mid J \in A\}$ eine konfinale Teilmenge von

$\mathcal{B} := \{K \subset T^I \mid K \text{ abgeschlossene Untergruppe von } T^I, T^I/K \text{ LIE-Gruppe}\}$

T^I ist polythetisch $\iff \text{card}(I) \leq \aleph$ (*)

Beweis von (*) :

" $\implies$ " : Ist T^I polythetisch , so ist die Dualgruppe $\mathbb{Z}^{(I)}$ von T^I algebraisch isomorph zu einer Untergruppe von T^n (für geeignetes $n \in \mathbb{N}$)
($\mathbb{Z}^{(I)}$ sei diejenige Untergruppe von $\mathbb{Z}^I$, deren Elemente nur in endlich vielen Komponenten von 0 verschieden sind)

(siehe Takamatsu [1] , Theorem 1) .

Es folgt daher: $\text{card}(I) = \text{card}(\mathbb{Z}^{(I)}) \leq \aleph$.

" $\impliedby$ " : Ist $\text{card}(I) \leq \aleph$, so folgt aus Hewitt/Ross [1] , (25.15), daß T^I sogar monothetisch ist , d.h. es gibt ein $a \in T^I$ mit $\overline{\{a\}} = T^I$.

Für $J \in A$ sei $p_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{R}_+$, $k \mapsto \ln(1 + |k|)$ (dabei werde $\mathbb{Z}^J$ mit der entsprechenden Teilmenge von $\mathbb{Z}^{(I)}$ identifiziert).
Sei $P := (p_J)_{J \in A}$.

Aus (*) und (3.1.4) folgt ,daß T^I höchstens dann Elemente $a_1, \dots, a_r$ besitzen kann , die n.g.a.-($P, \mathbb{Z}^{(I)} \setminus \{0\}$) sind, wenn $\text{card}(I) \leq \aleph$.

Sei nun $\text{card}(I) \leq \aleph_0$.

Dann sind für $a_1, \dots, a_r \in T^I$ äquivalent: (vgl. (3.1.2))

a) $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($P, \mathbb{Z}^{(I)} \setminus \{0\}$)

b) $\bigvee_{J \in A} \text{pr}_J(a_1, \dots, \text{pr}_J(a_r))$ n.g.a.-($P_J, \mathbb{Z}^J \setminus \{0\}$)

Für $r=1$ bedeutet dies : $(a = (\pi_{\mathbb{Z}}(a^i))_{i \in I})$ mit $a^i \in \mathbb{R}$ für $i \in I$
 a n.g.a.-($P, \mathbb{Z}^{(I)} \setminus \{0\}$) $\iff \bigvee_{J \in A} \text{pr}_J(a)$ n.g.a.-($P_J, \mathbb{Z}^J \setminus \{0\}$)

$\iff \bigvee_{\substack{J \in A \\ J = \{j_1, \dots, j_n\}}} a^{j_1}, \dots, a^{j_n}$ erfüllen (+) im Beweis von (3.1.8) .

Ist $\text{card}(I) \leq \aleph_0$, so kann man ein solches a erhalten, indem man die Familie $(a^i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ so wählt, daß $\{a^i | i \in I\} \cup \{1\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist und alle a^i ($i \in I$) algebraisch sind (vgl. Beweis zu (3.1.8)) .

H.M.Schmidt konnte nachweisen (Schmidt [2], Theorem 1) , daß es ein Element $(a^t)_{t \in]0, 1]} \in \mathbb{R}^{]0, 1]}$ gibt, so daß gilt :

$\bigvee_{\substack{J \subset]0, 1] \\ J \text{ endlich} \\ J = \{t_1, \dots, t_s\}}} a^{t_1}, \dots, a^{t_s}$ erfüllen (+) im Beweis von (3.1.8) ¹⁾;

er zeigte nämlich, daß dies für $(a^t)_{t \in]0, 1]}$ mit

$a^t := \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} 2^{t+1} \lfloor \quad$ (wobei $\lfloor x \rfloor$ für $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichne)

$(t \in]0, 1])$

erfüllt ist .

Das Element $a := (\pi_{\mathbb{Z}}(a^t))_{t \in]0, 1]} \in T^{]0, 1]}$ ist daher n.g.a.-($P, \mathbb{Z}^{]0, 1]} \setminus \{0\}$) (siehe oben) .

Es folgt :

$\text{card}(I) \leq \aleph_0 \implies \exists_{a \in T^I} a$ n.g.a.-($P, \mathbb{Z}^{(I)} \setminus \{0\}$) .

Insgesamt gilt also:

$\text{card}(I) \leq \aleph_0 \iff \exists_{a \in T^I} a$ n.g.a.-($P, \mathbb{Z}^{(I)} \setminus \{0\}$) .

(3.1.14) Bemerkung

Sei $(a^t)_{t \in]0, 1]}$ wie in (3.1.13) . Es gilt :

$\bigvee_{n \in \mathbb{N}^*} \exists_{t_1, \dots, t_n \in]0, 1]} a^{t_1}, \dots, a^{t_n}$ transzendent und erfüllen (+) im Beweis von (3.1.8) :

1) Schmidt bezeichnet $(a^1, \dots, a^r) \in \mathbb{R}^r$ als "nicht-Liouville r -Tupel" ($r \in \mathbb{N}^*$) , falls $a^1, \dots, a^r$ (+) aus dem Beweis von (3.1.8) erfüllen .

Aus der linearen Unabhängigkeit über $\mathbb{Q}$ von $\{a^t \mid t \in]0, 1[\cup \{1\}\}$ (vgl. (3.1.9)e)) folgt nämlich, daß $\{a^t \mid t \in]0, 1[\}$ unendlich viele transzendente Zahlen enthalten muß.

Aus dem Beweis von (3.1.8) ersieht man, daß hieraus folgt:

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}^*} a_n' := (\pi_{\mathbb{Z}}(a_n^{t_n}))_{1 \leq n \leq n} \text{ n.g.a.-(p}_n, \mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$$

$$(\text{mit } p_n: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, k \mapsto \ln(1+|k|))$$

(vgl. (3.1.9)e)).

Für profinite Gruppen (siehe (2.2.10)) gilt die Umkehrung von (3.1.4) im abelschen Fall; im allgemeinen Fall hat man zumindest eine Abschwächung dieser Umkehrung:

(3.1.15) Beispiel

Sei G eine profinite Gruppe,

$G = \text{proj lim } (A, G/H_\alpha, \text{pr}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$ (Bezeichnungen wie in (2.2.10)).

Sei $P = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $p_\alpha: \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+$ beliebig ($\alpha \in A$).

Dann gilt für $a_1, \dots, a_r \in G$ (vgl. (3.1.2), (1)):

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P, } \Sigma \setminus \{\epsilon_0\}) &\iff \\ \iff \bigvee_{\alpha \in A} \text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_r) \text{ n.g.a.-(p}_\alpha, \Sigma_\alpha \setminus \{\epsilon_0\}) \end{aligned}$$

Im abelschen Fall folgt hieraus:

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P, } \widehat{G} \setminus \{0\}) &\iff \\ \iff \bigvee_{\alpha \in A} [\{\text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_r)\}] = G/H_\alpha, \end{aligned}$$

denn:

" $\implies$ ": wegen oben und (3.1.4)

" $\impliedby$ ": wegen oben und (3.1.10).

Für eine profinite abelsche Gruppe G hat man deshalb und wegen (3.1.4):

Für $a_1, \dots, a_r \in G$ gilt:

$$a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P, } \widehat{G} \setminus \{0\}) \iff G \text{ polythetisch mit } \overline{[a_1, \dots, a_r]} = G$$

(denn aus $\overline{[a_1, \dots, a_r]} = G$ folgt offenbar:

$$\bigvee_{\alpha \in A} [\{\text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_r)\}] = G/H_\alpha \quad . \quad)$$

Für den allgemeinen profiniten Fall werden wir später (siehe (4.1.5)) sehen, daß gilt :

$$\overline{[a_1, \dots, a_r]} = G \implies a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.} - (P, \Sigma \setminus \{e_0\}) .$$

3.2 Nicht-gleichzeitige P-Approximierbarkeit in beliebigen LK-Gruppen

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von G , so daß G/H kompakt ist. Sei Σ_0 das duale Objekt von G/H , $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$, $P = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ wie in §3.1 mit G/H statt G . Wir wollen nun den Begriff der nicht-gleichzeitigen P-Approximierbarkeit auch für Elemente $a_1, \dots, a_r \in G$ einführen:

(3.2.1) Definition

Voraussetzungen wie oben. Seien $a_1, \dots, a_r \in G$, $S := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$. $a_1, \dots, a_r$ heißen (bzgl. H) auf S nicht gleichzeitig P-approximierbar (n.g.a.-(H;P,S)), wenn $\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)$ n.g.a.-(P,S) sind. Für $P=(p)$ sprechen wir wieder von "nicht gleichzeitig p-approximierbar" bzw. "n.g.a.-(H;p,S)".

(3.2.2) Bemerkung

Sei G eine abelsche LK-Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe von G , so daß G/H kompakt ist.

Dann gilt: $(G/H)^\wedge$ kann mit der Untergruppe $H^\perp$ von $\hat{G}$ identifiziert werden; da G/H kompakt ist, hat man:

$H^\perp = \bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha^\perp$, wobei A eine gerichtete Menge ist, $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$

eine Familie von abgeschlossenen Untergruppen von G ist mit

$\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha = H$, $H_\alpha \supset H_\beta$ für $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$ (vgl. (2.1.8)).

Sei $\Sigma_\alpha := H_\alpha^\perp$, $S_\alpha \subset H_\alpha^\perp$, $p_\alpha : H_\alpha^\perp \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($\alpha \in A$), so daß

(2.1.6) und (2.1.7) gelten. Für $S := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$, $P = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$

und $a_1, \dots, a_r \in G$ erhält man: (siehe (3.1.6))

$$a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(P,S)} \iff \forall_{\alpha \in A} \exists_{C_\alpha, b_\alpha > 0} \forall_{\xi \in S_\alpha} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} \llbracket \langle a_v, \xi \rangle \rrbracket \geq C_\alpha^{-b_\alpha} \xi.$$

(3.2.3) Beispiele

a) Sei $G := \mathbb{R}^m$, $H := \mathbb{Z}^m$.

Dann $G/H = \mathbb{T}^m$, $H^\perp = \mathbb{Z}^m$.

Sei $p : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$, $k \mapsto \ln(1+|k|)$, $S := \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$.

Für $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^m$ gilt dann nach (3.2.2):

$$a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(H;p,S)} \iff$$

$$\iff \exists_{C, b > 0} \forall_{k \in \mathbb{Z}^m} \exists_{v \in \{1, \dots, r\}} \llbracket \langle a_v, k \rangle \rrbracket \geq C(1+|k|)^{-b} \quad (*)$$

Für den Fall $m=1$ stellt (*) gerade eine zu der von E. Kregelius Petersen äquivalente Definition der "nicht gleichzeitig schnell approximierbaren" endlichen Zahlenfolgen dar (vgl. Kregelius Petersen [1]).

b) Sei $G := \mathbb{Z}^m$, $H := q_1 \mathbb{Z} \times \dots \times q_m \mathbb{Z}$ für beliebige $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{N}^*$.

Dann: $G/H \cong \mathbb{Z}/q_1 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_m \mathbb{Z} \cong H^\perp$

Für $r \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}^m$ gilt wegen (3.1.4) und (3.1.10):
 $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($H; 0, H^\perp \setminus \{0\}$) $\iff$

$\iff \pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)$ erzeugen $\mathbb{Z}/q_1 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_m \mathbb{Z}$.

Es gilt folgende Verallgemeinerung von (3.1.4):

(3.2.4) Satz

Sei G eine LK-Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von G mit G/H kompakt. Seien $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($H; P, \Sigma_0 \setminus \{e_0\}$) für geeignetes P gemäß (3.2.1). Dann folgt:

$$\overline{N(\{a_1, \dots, a_r\} \cup H)} = G.$$

Ist insbesondere $H = \overline{N(h_1, \dots, h_m)}$ für geeignete $h_1, \dots, h_m \in H$, so ist auch G polythetisch.

Beweis:

Aus (3.1.4) folgt: $\overline{N(\{\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)\})} = G/H$.

Deshalb: $G = \pi_H^{-1}(\overline{N(\{\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)\})})$

$$\subset \overline{N(\{a_1, \dots, a_r\} \cup H)}.$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

(3.2.5) Definition

Sei G eine LK-Gruppe.

Sei $\wp(G)$ die kleinste Kardinalzahl einer Teilmenge B von G mit $\overline{N(B)} = G$.

Mit dieser Definition gilt:

(3.2.6) Satz

Sei G eine LK-Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von G mit G/H kompakt; Σ_0 bezeichne das duale Objekt von G/H .

G besitzt höchstens dann n.g.a.-($H; P, \Sigma_0 \setminus \{e_0\}$) Elemente $a_1, \dots, a_r$ (für P wie in (3.2.1)), wenn gilt: $r + \wp(H) \geq \wp(G)$.

Beweis: (3.2.4).

§4 Das LILF-Problem auf $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{Q}'(G)$, $\mathcal{Q}(G)$ und $\mathcal{E}(G)$

In diesem Paragraphen wird das LILF-Problem auf $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{Q}'(G)$, $\mathcal{Q}(G)$ und $\mathcal{E}(G)$ für abelsche und gewisse nicht notwendig abelsche Gruppen G mittels der in den vorangegangenen Paragraphen bereitgestellten Aussagen analysiert. Am unmittelbarsten ergibt sich aus den bisherigen Überlegungen der Zugang zum LILF-Problem auf $\mathcal{E}'(G)$ und damit auch, wie wir sehen werden, zu dem auf $\mathcal{Q}(G)$:

4.1 Die Fälle $\mathcal{E}'(G)$ und $\mathcal{Q}(G)$

Sei G zunächst eine kompakte Gruppe, also $\mathcal{E}'(G) = \mathcal{Q}'(G)$. Ist G abelsch, so erhalten wir aus §2 und §3:

(4.1.1) Theorem

Sei G eine kompakte abelsche Gruppe, $B \subset G$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $\Delta_B(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
- b) $\bigcap_{B' \subset B} \Delta_{B'}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
 B' endlich
- c) $\bigcap_{a_1, \dots, a_r \in B} a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.} - (P, \hat{G} \setminus \{0\})$
 (dabei sei P wie in (3.1.2)) 1).

Beweis:

zu "a) $\implies$ b)" : (3.0.4)

zu "b) $\implies$ c)" : Sei $B' = \{a_1, \dots, a_r\}$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in B$. Aus (2.3.4) folgt nun : $\langle f_{a_1}, \dots, f_{a_r} \rangle = \mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{0\})$.

Wegen (2.3.15) erhalten wir!

(Bezeichnungen wie in (3.1.2) bzw. (2.2.3)-(2.2.5))

$$\bigvee_{\alpha \in A} C_\alpha, b_\alpha > 0 \quad \bigcap_{\xi \in \hat{G}_\alpha \setminus \{0\}} \sum_{\nu=1}^r |f_{a_\nu}(i_\alpha(\xi))| \geq C_\alpha e^{-b_\alpha p_\alpha(i_\alpha(\xi))}$$

Wegen $f_{a_\nu}(i_\alpha(\xi)) = 1 - [a_\nu, i_\alpha(\xi)] = 1 - [\text{pr}_\alpha(a_\nu), \xi]$ für $\xi \in \hat{G}_\alpha$ ($1 \leq \nu \leq r$, $\alpha \in A$) folgt hieraus die Behauptung (vgl. (3.1.2)).

zu "c) $\implies$ a)" : Aus c) folgt, daß $f_{a_1}, \dots, f_{a_r} \in \mathcal{A}_P(\hat{G} \setminus \{0\})$ erzeugen (wegen (2.3.15)) .

Daher : $\text{Kern } \tilde{\mu}_G = \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G))$ (wegen (2.3.4))
 $\subset \Delta_B(\mathcal{Q}'(G))$.

1) Da die Familie $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ aus (3.1.2) nicht eindeutig bestimmt ist und $P = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ davon wesentlich abhängt, ist natürlich auch P nicht eindeutig bestimmt; die Aussage des Theorems gilt jedoch für alle P gemäß (3.1.2) .

Ist G eine profinite Gruppe, so gilt ebenso:

(4.1.2) Theorem

Sei G eine profinite Gruppe, $B \subset G$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $\Delta_B(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
- b) $\exists_{\substack{B' \subset G \\ B' \text{ endlich}}} \Delta_{B'}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
- c) $\exists_{a_1, \dots, a_r \in B} a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(} P^1, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\} \text{)}$
(dabei sei P^1 wie in (2.2.12)¹⁾, Σ das duale Objekt von G).

Beweis:

zu "a) $\implies$ b)": (3.0.4) .

zu "b) $\implies$ c)": Sei $B' = \{a_1, \dots, a_r\}$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in B$.

Aus (2.3.11) erhalten wir: $\langle f_{a_1}, \dots, f_{a_r} \rangle = \mathcal{A}_{P^1}(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$.

Wegen (2.3.15) folgt:

$$\forall \alpha \in A \quad \exists c_\alpha > 0 \quad \forall \substack{\sigma \in A(\Sigma, H_\alpha) \\ \sigma \neq \epsilon_0} \quad \inf_{\substack{y \in H_\sigma \\ \|y\|_\sigma = 1}} \|f_{a_\nu}(\sigma)(y)\|_\sigma \geq c_\alpha \quad (*)$$

(H_α ($\alpha \in A$) wie in (2.2.10)) .

Wegen $f_{a_\nu}(\sigma) = \text{id} - \bar{u}_{a_\nu}^{(\sigma)}$ für $1 \leq \nu \leq r$, $\sigma \in \Sigma$ folgt hieraus, daß $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($P^1, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\}$) sind.

zu "c) $\implies$ a)": Gilt c), so gilt (*) für $f_{a_1}, \dots, f_{a_r}$, d.h.

wegen (2.3.15) gilt: $\langle f_{a_1}, \dots, f_{a_r} \rangle = \mathcal{A}_{P^1}(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$.

Aus (2.3.11) ergibt sich:

$$\text{Kern } \tilde{\mu}_G = \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) \subset \Delta_B(\mathcal{Q}'(G)) .$$

Aus (3.1.15) folgt daher für eine abelsche profinite Gruppe:

(4.1.3) Satz

Sei G eine abelsche profinite Gruppe, $B \subset G$.

Dann sind die Aussagen

- a) $\Delta_B(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ und
- b) G ist polythetisch und es gibt $a_1, \dots, a_r \in B$ mit $\overline{\{a_1, \dots, a_r\}} = G$
(d.h. $r \geq \rho(G)$) .

gleichwertig .

1) wie bei (4.1.1) hängt P^1 zwar wesentlich von der Familie $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ von endlichen Gruppen ab, die G approximieren; die Aussage des Theorems gilt jedoch für alle P^1 gemäß (2.2.12).

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b) : Aus a) folgt wegen (4.1.2), daß es $a_1, \dots, a_r \in B$ gibt mit $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($P^1, \hat{G} \setminus \{0\}$) (mit P^1 aus (2.2.12)). Aus (3.1.15) erhalten wir: G ist polythetisch, $G = \overline{\{a_1, \dots, a_r\}}$.

b) $\Rightarrow$ a) : Aus b) folgt wegen (3.1.14), daß $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($P^1, \hat{G} \setminus \{0\}$) sind; aus (4.1.2) ergibt sich die Behauptung.

(4.1.4) Beispiele

a) Sei $G := T^n \times F$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ für geeignete Primzahlpotenzen $m_1, \dots, m_s$, $s \in \mathbb{N}^*$, $B \subseteq G$. Dann sind wegen (4.1.1) äquivalent: ¹⁾

- 1) $\Delta_B(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
- 2) $\bigcap_{a_1, \dots, a_r \in B} a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($p, (\mathbb{Z}^n \times F) \setminus \{(0, 0)\}$),
mit $p: \mathbb{Z}^n \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(k, x) \mapsto \ln(1 + |k|)$.

Aus (3.1.7) erhalten wir nun:

Für alle $r \geq s$ gibt es $a_1, \dots, a_r \in G$ mit $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$.

(Genauer gilt sogar wegen (3.1.10) und (3.1.11):

Für alle $r \geq \rho(F)$ gibt es $a_1, \dots, a_r \in G$ mit $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$.)

b) Sei I eine beliebige Indexmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) $\Delta(\mathcal{Q}'(T^I)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{T^I}$
- 2) $\bigcap_{a \in T^I} \Delta_{\{a\}}(\mathcal{Q}'(T^I)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{T^I}$
- 3) $\text{card}(I) \leq \aleph$,

denn:

"1) $\Rightarrow$ 3)" : Aus $\Delta(\mathcal{Q}'(T^I)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{T^I}$ folgt wegen (4.1.1) und (3.1.4), daß T^I polythetisch ist. Aus (3.1.13) erhalten wir daher, daß $\text{card}(I) \leq \aleph$.

"3) $\Rightarrow$ 2)" : (3.1.13).

"2) $\Rightarrow$ 1)" : trivial

c) Sei G eine nicht-polythetische profinite Gruppe. Dann ist $\Delta(\mathcal{Q}'(G)) \subsetneq \text{Kern } \tilde{\mu}_G$, wegen (4.1.2) hätte G nämlich sonst n.g.a.-($P^1, \Sigma \setminus \{e_0\}$) Elemente $a_1, \dots, a_r$ und wäre damit polythetisch (vgl. (3.1.4)).

1) Wir identifizieren wieder $\hat{G}$ mit $\mathbb{Z}^n \times F$.

d) Sei G eine beliebige endliche Gruppe . Dann gilt :

1) $[a_1, \dots, a_r] = G$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in G \implies$
 $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$, wegen (4.1.2) sind daher
 $a_1, \dots, a_r$ n.g.a. $-(0, \sum \{ \epsilon_0 \})$.

Beweis: Da G endlich ist , können $\mathcal{Q}'(G)$ und $(\mathcal{Q}'(G))^*$ mit $\mathbb{C}^G$ identifiziert werden:

Die kanonische Bilinearform $\mathcal{Q}'(G) \times (\mathcal{Q}'(G))^* \longrightarrow \mathbb{C}$,

$(S, \lambda) \longmapsto \lambda(S)$ stellt sich damit in der Form

$(S, \lambda) \longmapsto \sum_{x \in G} \lambda(x) S(x)$ dar (für $\lambda = (\lambda(x))_{x \in G}$ und $S = (S(x))_{x \in G}$).

Offenbar wird $\tilde{\mu}_G$ durch $(\frac{1}{\text{card}(G)})_{x \in G}$ vertreten.

Gilt $M \in \text{LI}(\mathcal{Q}'(G))$, so müssen die Komponenten $M(x)$ ($x \in G$) gleich sein , denn $M(\chi_{\{x\}}) = M(\chi_{\{x'\}})$ für alle $x, x' \in G$; daher : $\text{LI}(\mathcal{Q}'(G)) = \mathbb{C} \cdot \tilde{\mu}_G$. Da dies jedoch äquivalent zur Aussage $\Delta(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ ist , folgt für $a_1, \dots, a_r \in G$ mit $[a_1, \dots, a_r] = G$ wegen (1.1.26) , daß

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G .$$

2) Andererseits können wir sehen, daß i.a. nicht gilt:

$$N(\{a_1, \dots, a_r\}) = G \text{ für } a_1, \dots, a_r \in G \implies$$

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G :$$

Sei $G := S(3)$ (Bezeichnungen wie in Hewitt/Ross [2] , (27.59) bzw. wie in (3.1.3)d)) .

Dann gilt:

$$N(\{(12)\}) = G .$$

Andererseits kann man sich anhand der Überlegungen in 1) leicht davon überzeugen , daß $\text{LI}_{\{(12)\}}(\mathcal{Q}'(G))$ mit dem folgenden Teilraum von $\mathbb{C}^G$ identifiziert werden kann :

$$U := \{ (\lambda(x))_{x \in G} \mid \lambda(x) = \lambda(x') \text{ falls } x = (12) \circ x' \} .$$

Wegen $U + \mathbb{C}(1)_{x \in G} = \mathbb{C} \tilde{\mu}_G$ folgt daher :

$$\Delta_{\{(12)\}}(\mathcal{Q}'(G)) \neq \text{Kern } \tilde{\mu}_G$$

Aus (4.1.4)d) folgt für eine beliebige profinite Gruppe :

(4.1.5) Lemma

Sei G eine beliebige profinite Gruppe .

Dann folgt aus $\overline{[B]} = G$ für $B \in G$ endlich :

$\Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$, d.h. die Elemente von B sind n.g.a.-
 $(P^1, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})^*$ (mit P^1 wie in (2.2.12)).

Beweis: Sei $B = \{a_1, \dots, a_r\}$ ($r \in \mathbb{N}^*$).

Sei $G = \text{proj lim}(A, G/H_\alpha, \text{pr}_\alpha)_{\beta} \quad (\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta)$ wie in
 (2.2.10).

Aus $\overline{[B]} = G$ folgt offenbar $[\text{pr}_\alpha(B)] = G/H_\alpha$ (für alle $\alpha \in A$).

Aus (4.1.4)d) erhält man: $\text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_r)$ n.g.a.- $(0, \Sigma_\alpha \setminus \{\epsilon_0\})$
 mit $\Sigma_\alpha = A(\Sigma, H_\alpha)$ (Σ sei das duale Objekt von G) ($\alpha \in A$).

Daher: $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(P^1, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ und deshalb wegen
 (4.1.2):

$$\Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G.$$

Ob auch die Umkehrung von (4.1.5) gilt, ist offen: Aus (3.1.4)
 und (4.1.2) folgt für eine endliche Teilmenge B einer profiniten
 Gruppe G aus $\Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ lediglich: $\overline{N(B)} = G$.
 Andererseits ist aber wegen (4.1.4)c) die Aussage:
 $\overline{N(B)} = G \implies \Delta_B(\mathcal{D}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ (für $B \subset G$ endlich, G
 profinit) offenbar i.a. falsch.

Mit Hilfe von (4.1.1) können wir das LILF-Problem nun auch
 für beliebige abelsche LK-Gruppen analysieren:

Jede abelsche LK-Gruppe G besitzt eine kompakt erzeugte offene
 Untergruppe G_1 (Hewitt/Ross [1], (5.14)). Da man wegen
 (1.2.16) das LILF-Problem auf $\mathcal{E}'(G)$ auf die entsprechende
 Frage für $\mathcal{E}'(G_1)$ reduzieren kann, behandeln wir zunächst
 kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppen:

Sei G eine kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppe. Aus dem
 Struktursatz für kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppen (Hewitt/
 Ross [1], (9.14)) folgt:

(4.1.6) $G \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times G_0$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt
 sind und G_0 eine (bis auf Iso-
 morphie eindeutig bestimmte) kom-
 pakte abelsche Gruppe ist.

Jede kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppe G besitzt daher eine
 diskrete Untergruppe $H \cong \mathbb{Z}^{n+m}$ (n, m zu G wie oben), so daß
 G/H kompakt ist. Man erhält daher (Verallgemeinerung zu
 (4.1.1)):

*) vgl. (3.1.15)

(4.1.7) Theorem

Sei G eine kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppe. Sei $H \cong \mathbb{Z}^{n+m}$ eine diskrete Untergruppe von G wie oben, mit n, m gemäß (4.1.6). Sei $H = [\{h_1, \dots, h_{n+m}\}]$ für geeignete $h_1, \dots, h_{n+m} \in H$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $\Delta(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$

b) $\bigcap_{\substack{B \subset G \\ B \text{ endlich}}} \Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$

c) G besitzt Elemente $a_1, \dots, a_r$ ($r \in \mathbb{N}^*$), die n.g.a.-($H; P, H^\perp \setminus \{0\}$) sind (P wie in (3.1.2))¹⁾ und es gilt:

$$\text{Kern } \tilde{\mu}_G = \Delta_{\{a_1, \dots, a_r, h_1, \dots, h_{n+m}\}}(\mathcal{E}'(G)).$$

Beweis:

zu "a) $\implies$ c)" :

Wegen $\Delta(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ und (1.2.10) gilt:

$$\Delta(\mathcal{E}'(G/H)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G/H}.$$

Da G/H kompakt ist (siehe (4.1.6)), gibt es nach (4.1.1)

$a_1, \dots, a_r \in G$, so daß $\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)$ n.g.a.-($P, (G/H)^\perp \setminus \{0\}$) (P wie in (3.1.2)) sind.

$a_1, \dots, a_r$ sind daher definitionsgemäß n.g.a.-($H; P, H^\perp \setminus \{0\}$).

Andererseits hat man wegen (4.1.1) mit $B := \{\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)\}$:

$$\Delta_{\{\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)\}}(\mathcal{E}'(G/H)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G/H} \quad \text{und deshalb mit}$$

(1.2.10) und (1.1.26) :

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r, h_1, \dots, h_{n+m}\}}(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G.$$

"c) $\implies$ b)" und "b) $\implies$ a)" sind offensichtlich.

(4.1.8) Beispiel

Sei $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times T^1 \times F$ ($n, m, l \in \mathbb{N}$, F endliche abelsche Gruppe, $F = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ mit Primzahlpotenzen $m_1, \dots, m_s, s \in \mathbb{N}^*$). Sei $H := \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m = \mathbb{Z}^{n+m}$, also $G/H = T^{n+1} \times F$.

Sei $r \geq s$.

Aus (4.1.4)a) folgt, daß es $a_1, \dots, a_r \in G$ gibt mit $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.-($H; p, H^\perp \setminus \{0\}$), wobei $p: H^\perp = \mathbb{Z}^{n+1} \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(k, x) \mapsto \ln(1 + |k|)$.

1) siehe Fußnote auf S.119

Für $v \in \{1, \dots, n+m\}$ sei $h_v := (\delta_{\mu v})_{1 \leq \mu \leq n+m} \in H$, also

$$\{h_1, \dots, h_{n+m}\} = H.$$

Aus (4.1.7), "c) $\implies$ a)", folgt :

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r, h_1, \dots, h_{n+m}\}}(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G.$$

Nach (4.1.1) und (3.1.4) folgt bei einer kompakten abelschen Gruppe G aus $\Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$ ($B \subset G$): $[\overline{B}] = G$. Diese (eigentlich naheliegende) Aussage gilt allgemein für jede abelsche LK-Gruppe:

(4.1.9) Lemma

Sei G eine beliebige abelsche LK-Gruppe, $B \subset G$.

Dann folgt aus $\Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$:

$$[\overline{B}] = G.$$

Beweis :

Annahme : $[\overline{B}] \neq G$. Dann gibt es ein $x \in G \setminus [\overline{B}]$ und ein

$\xi \in \hat{G}$ mit $\xi(x) \neq 1$, $\xi(y) = 1$ für alle $y \in [\overline{B}]$.

Wegen $\Delta(\mathcal{E}'(G)) \subset \text{Kern } \tilde{\mu}_G = \Delta_B(\mathcal{E}'(G))$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}^*$,

$s_1, \dots, s_r \in \mathcal{E}'(G)$ und $b_1, \dots, b_r \in B$ mit

$$\begin{aligned} \delta - x\delta &= \sum_{v=1}^r s_v - b_v s_v; \text{ d.h. } 1 - \xi(x) = (\delta - x\delta)(\xi)^1 = \\ &= \left(\sum_{v=1}^r s_v - b_v s_v \right) (\xi) = \\ &= \sum_{v=1}^r (1 - [b_v, \xi]) s_v(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Widerspruch !

Mit (3.2.4) kann man nun folgern :

(4.1.10) Satz

Sei G eine kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppe.

Dann folgt aus $\Delta(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$:

G ist polythetisch.

Gilt $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times G_0$ (wie in (4.1.6)), so folgt aus

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G \quad \text{mit } a_1, \dots, a_r \in G :$$

$$r \geq n+m + \varphi(T^n \times G_0) = \varphi(G) \quad (\text{mit } \varphi \text{ wie in (3.2.5)}).$$

Beweis:

Der erste Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus (4.1.7)

1) Es gilt : $\xi \in \mathcal{E}(G)$ (vgl. z.B. Bruhat [1], 7., Prop. 8).

und (3.2.4) .

Aus Takamatsu [1] , Theorem 4 und 5, folgt nun ,daß

$$\varphi(G) = \varphi(\mathbb{R}^n \times G_0) + m = \varphi(T^n \times G_0) + m + n \quad .$$

Wegen (4.1.9) erhält man : $r \geq \varphi(G)$.

Aus den Aussagen für kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppen ergibt sich das folgende Theorem für beliebige abelsche LK-Gruppen :

(4.1.11) Theorem

Sei G eine beliebige abelsche LK-Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $\Delta(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$

b) G besitzt eine offene kompakt erzeugte Untergruppe G_1 , so daß für eine endliche Teilmenge B von G_1 gilt :

$$\Delta_B(\mathcal{E}'(G_1)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G_1}$$

c) Alle offenen kompakt erzeugten Untergruppen G_1 von G besitzen eine endliche Teilmenge B mit :

$$\Delta_B(\mathcal{E}'(G_1)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G_1} \quad .$$

Beweis:

zu " $a) \implies c)$ ": Sei G_1 eine offene kompakt erzeugte Untergruppe von G . Wegen a) und (1.2.13) folgt: $\Delta(\mathcal{E}'(G_1)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G_1}$. Die Behauptung folgt nun aus (4.1.7) .

zu " $c) \implies b)$ ": Nach Hewitt/Ross [1] ; (5.14) besitzt G eine offene kompakt erzeugte Untergruppe G_1 . Aus c) folgt deshalb sofort b) .

zu " $b) \implies a)$ ": Aus b) folgt : $\text{LI}(\mathcal{E}'(G_1))$ ist eindimensional . Wegen (1.2.13) gilt daher auch $\dim \text{LI}(\mathcal{E}'(G)) = 1$, d.h.

$$\Delta(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G \quad .$$

Insbesondere gilt :

(4.1.12) Korollar

Sei G eine abelsche LK-Gruppe . Dann folgt aus $\Delta(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$: Alle offenen kompakt erzeugten Untergruppen von G sind polythetisch .

Aus (4.1.9) und da nach Takamatsu [1], Theorem 4, jede polythetische abelsche LK-Gruppe G kompakt erzeugt ist, folgt jedoch:

(4.1.13) Satz

Sei G eine abelsche LK-Gruppe; es gebe ein $B \subset G$ endlich mit $\Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$. Dann ist G polythetisch und damit kompakt erzeugt.

Für total unzusammenhängende LK-Gruppen ergibt sich aus (4.1.2) entsprechend zu (4.1.11):

(4.1.14) Theorem

Sei G eine beliebige total unzusammenhängende LK-Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $\Delta(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
- b) G besitzt eine offene kompakte Untergruppe G_1 , so daß für eine endliche Teilmenge B von G_1 gilt:
 $\Delta_B(\mathcal{D}'(G_1)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G_1}$
- c) Alle offenen kompakten Untergruppen G_1 von G besitzen eine endliche Teilmenge B mit
 $\Delta_B(\mathcal{D}'(G_1)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G_1}$.

Beweis:

zu "a) $\implies$ c)": Sei G_1 eine offene kompakte Untergruppe von G . Wegen Higgins [1], 9., Theorem 3, ist G_1 eine profinite Gruppe. Aus a) folgt nun wegen (1.2.13): $\Delta(\mathcal{D}'(G_1)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G_1}$. c) ergibt sich daher aus (4.1.2).

zu "c) $\implies$ b)": Nach Hewitt/Ross [1], (7.7) besitzt G eine kompakte offene Untergruppe G_1 . Aus c) folgt daher sofort b).

zu "b) $\implies$ a)": Wegen b) gilt: $\Delta(\mathcal{D}'(G_1)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_{G_1}$. a) folgt nun aus (1.2.13).

Nun zu $\mathcal{Q}(G)$:

Nach Johnson [2], 3., Theorem 2 und Cor. zu Theorem 1 gilt :

(4.1.15) Satz

Sei G eine abelsche oder total unzusammenhängende LK-Gruppe.
Dann: $\Delta(\mathcal{Q}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G)$.

Wir wollen nun untersuchen , für welche $B \subset G$ gilt :

$$(4.1.16) \quad \Delta_B(\mathcal{Q}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G) ,$$

wobei G eine LK-Gruppe (meist abelsch oder profinit) ist.

Zunächst einmal kann man feststellen , daß $\mathcal{Q}(G)$ ¹⁾ bzgl. der Faltung ein Linksideal von $\mathcal{E}'(G)$ (siehe (1.1.19)d)) ist . Ist G eine kompakte abelsche oder eine profinite Gruppe , so folgt aus (2.2.6) bzw. (2.2.12) , daß $\text{Kern } \tilde{\mu}_G$ ein Ideal von $\mathcal{E}'(G)$ mit einem Einselement S_0 ist . Für $\mathcal{Q}(G)$ ist deshalb folgende Aussage gültig:

(4.1.17) Lemma

Sei G eine kompakte abelsche oder eine profinite Gruppe, $B \subset G$.
Dann folgt aus $\Delta_B(\mathcal{E}'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G : \Delta_B(\mathcal{Q}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G)$.

Beweis:

Sei $f \in \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G)$, also $f \in \text{Kern } \tilde{\mu}_G$.

Daher $f = S_0 * f$; wegen $S_0 \in \text{Kern } \tilde{\mu}_G = \Delta_B(\mathcal{E}'(G))$ hat man :
 $S_0 = \sum_{v=1}^r S_v - a_v S_v$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in B, S_1, \dots, S_r \in \mathcal{E}'(G)$.

$$\begin{aligned} \text{Es folgt: } f &= \left(\sum_{v=1}^r S_v - a_v S_v \right) * f = \sum_{v=1}^r S_v * f - (a_v * S_v) * f = \\ &= \sum_{v=1}^r S_v * f - a_v \delta * (S_v * f) = \sum_{v=1}^r S_v * f - a_v (S_v * f) \\ &\in \Delta_B(\mathcal{Q}(G)) \text{ wegen (1.1.19)d) .} \end{aligned}$$

(4.1.18) Folgerung

Sei G eine kompakte abelsche oder eine profinite Gruppe.

Sind $a_1, \dots, a_r \in G$ n.g.a.-($P, \hat{G} \setminus \{0\}$) (falls G abelsch ; P wie in (4.1.1)) bzw. n.g.a.-($P^1, \Sigma \setminus \{e_0\}$) (falls G profinit ; P^1 wie in (4.1.2)) , so gilt: $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G)$.

1) $\mathcal{Q}(G)$ werde wie in (1.1.14) mit einem Teilraum von $\mathcal{E}'(G)$ identifiziert.

Die Umkehrung von (4.1.17) ist offenbar i.a. falsch, denn es gibt sowohl kompakte abelsche Gruppen G als auch profinite Gruppen G mit $\Delta(\mathcal{A}'(G)) \neq \text{Kern } \mu_G$ (vgl. (4.1.4)b) und c)), während nach (4.1.15) für jede dieser Gruppen $\Delta(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$ gilt.

Wie für $E'(G)$ gilt jedoch wieder:

(4.1.19) Lemma

Sei G eine abelsche LK-Gruppe oder eine profinite Gruppe, $B \subset G$. Dann folgt aus $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G) : \overline{N(B)} = G$.

Beweis:

Sei G zunächst eine abelsche LK-Gruppe, $B \subset G$ mit $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$.

Wäre $\overline{[B]} \neq G$, so gäbe es ein $\xi \in \hat{G} \setminus \{0\}$ mit $\xi | \overline{[B]} = 1$.

Wegen $\xi \neq \lambda \cdot 1$ (für alle $\lambda \in \mathbb{C}$) sind S_ξ und S_1 (vgl. Bemerkung nach (1.1.13)) linear unabhängig; daher gibt es ein $\varphi \in \mathcal{A}(G)$, sodaß $\mu_G(\varphi) = 0$ und $\mu_G(\xi\varphi) = 1$.

Wegen $\varphi \in \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$ gibt es nach Voraussetzung $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}(G)$ und $a_1, \dots, a_r \in B$, sodaß $\varphi = \sum_{v=1}^r f_v - a_v f_v$.

Bezeichnet $\mathcal{F} : \mathcal{H}(G) \rightarrow C_0(\hat{G})$ die Fouriertransformation, so folgt:

$$1 = \mathcal{F}(\varphi)(\xi^{-1}) = \sum_{v=1}^r ((1 - [a_v, \xi]) \mathcal{F}(f_v)(\xi^{-1})) = 0 \text{ Widerspruch!}$$

Ist G eine profinite Gruppe, $B \subset G$, $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$, so folgt aus der Annahme: $\overline{N(B)} \neq G$:

$$\exists_{\substack{\epsilon \in \Sigma \\ \epsilon \neq \epsilon_0}} U_a^{(\epsilon)} = \text{id für alle } a \in B. \text{ Sei } \xi \in H_\epsilon \text{ mit } \|\xi\|_\epsilon = 1.$$

Für ξ erhalten wir nun wegen $f_{\epsilon, \xi, \xi} \in \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$ ($f_{\epsilon, \xi, \xi}$ wie in (2.2.7); siehe Hewitt/Ross [2], (27.17)):

$$f_{\epsilon, \xi, \xi} = \sum_{v=1}^r f_v - a_v f_v \text{ für } f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}(G), a_1, \dots, a_r \in B.$$

Aus Hewitt/Ross [2], (27.18) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\epsilon} &= \int_G f_{\epsilon, \xi, \xi}(x) \langle U_x^{(\epsilon)} \xi, \xi \rangle d\mu_G(x) = \\ &= \sum_{v=1}^r \int_G (f_v - a_v f_v)(x) \langle U_x^{(\epsilon)} \xi, \xi \rangle d\mu_G(x) = \\ &= \sum_{v=1}^r \int_G f_v(x) \langle (\text{id} - U_{a_v}^{(\epsilon)}) U_x^{(\epsilon)} \xi, \xi \rangle d\mu_G(x) \\ &= 0. \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

(4.1.20) Folgerung

Sei G eine nicht-polythetische abelsche oder profinite LK-Gruppe. Dann gibt es keine endliche Teilmenge $B \subset G$, so daß

$\Delta_B(\mathcal{D}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{D}(G)}$. Insbesondere gilt diese Aussage daher für abelsche LK-Gruppen, die nicht kompakt erzeugt sind.

Für eine endliche Teilmenge B von G gilt jedoch die Umkehrung von (4.1.17), denn dann hat man folgende Aussage:

(4.1.21) Satz

Sei G eine kompakte abelsche oder eine profinite Gruppe.

Dann folgt aus $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{D}(G)}$ für $a_1, \dots, a_r \in G$:

$a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(P, \hat{G} \setminus \{\theta\})$, falls G abelsch (P wie in (4.1.1)), bzw.

$a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(P^1, \sum \{\sigma_0\})$, falls G profinit (P^1 wie in (4.1.2)) .

Beweis:

Zunächst der abelsche Fall :

Seien $a_1, \dots, a_r \in G$ mit $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{D}(G)}$.

Annahme : $a_1, \dots, a_r$ nicht n.g.a.- $(P, \hat{G} \setminus \{\theta\})$.

Aus dieser Annahme folgt : (Bezeichnungen wie in (2.1.8))

$$(*) \quad \exists \alpha \in A((k^1, x^1)) \quad \exists \sum_{l \in \mathbb{N}^*} c_l \mathbb{Z}^{n_a \times F_a} \quad \forall l \in \mathbb{N}^* \quad \forall v \in \{1, \dots, r\} \quad |1 - [\text{pr}_a(a_v), (k^1, x^1)]| < (1 + |k^1|)^{-1}$$

$0 < |k^1| < |k^2| < \dots$

(den Beweis von (*) bringen wir später).

Wegen (*) ist folgende Funktion $f: \mathbb{Z}^{n_a \times F_a} \rightarrow \mathbb{C}$ (a wie in (*)) ein Element von $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^{n_a \times F_a})$ (= Raum der schnell fallenden Funktionen auf der diskreten LIE-Gruppe $\mathbb{Z}^{n_a \times F_a}$):

$$f(k, x) := \begin{cases} \sum_{v=1}^r |1 - [\text{pr}_a(a_v), (k^1, x^1)]| & \text{falls } (k, x) = (k^1, x^1) \text{ für ein } l \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(für $(k, x) \in \mathbb{Z}^{n_a \times F_a}$) :

denn für $m \in \mathbb{N}$ gilt $|f(k^1, x^1)| |k^1|^m < r |k^1|^m (1 + |k^1|)^{-1} < r |k^1|^{m-1} \rightarrow 0$ für $l \rightarrow \infty$.

Da $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^{n_a \times F_a}) = \mathcal{F}_a(\mathcal{D}(T^{n_a \times F_a})) = \mathcal{F}_a(\mathcal{D}(G/H_a))$ (vgl. Schwartz [1], §1), gibt es ein $g \in \mathcal{D}(G/H_a)$ mit $\mathcal{F}_a(g) = f$ ($\mathcal{F}_a: \mathcal{H}(G/H_a) \rightarrow C_0((G/H_a)^\wedge)$ bezeichne die Fouriertransformation).

Es gilt : $g \in \text{Kern } \mu_{G/H_a}$, denn $\mu_{G/H_a}(g) = \mathcal{F}_a(g)(\theta) = f(\theta) = 0$.

Aus $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{Q}(G)}$ folgt nun wegen (1.2.14) :

$$(**) \quad \Delta_{\{\text{pr}_a(a_1), \dots, \text{pr}_a(a_r)\}}(\mathcal{Q}(G/H_a)) = \text{Kern } \mu_{G/H_a}|_{\mathcal{Q}(G/H_a)}$$

Deshalb gibt es $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{Q}(G/H_a)$ so daß gilt :

$$g = \sum_{v=1}^r g_v - \text{pr}_a(a_v) g_v ; \quad \text{für } (k, x) \in \mathbb{Z}^{n_a} \times F_a = (G/H_a)^\wedge$$

folgt daher :

$$\mathcal{F}_a(g)(k, x) = \sum_{v=1}^r (1 - \overline{[\text{pr}_a(a_v), (k, x)]}) \mathcal{F}_a(g_v)(k, x) .$$

Man erhält für $1 \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |f(k^1, x^1)| &= |\mathcal{F}_a(g)(k^1, x^1)| \leq \\ &= \sum_{v=1}^r |1 - \overline{[\text{pr}_a(a_v), (k^1, x^1)]}| |\mathcal{F}_a(g_v)(k^1, x^1)| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq v \leq r} |\mathcal{F}_a(g_v)(k^1, x^1)| \sum_{v=1}^r |1 - \overline{[\text{pr}_a(a_v), (k^1, x^1)]}| . \end{aligned}$$

Wegen (**) kann nicht für alle $v \in \{1, \dots, r\}$ gelten :

$$[\text{pr}_a(a_v), (k^1, x^1)] = 1 , \text{ denn } (k^1, x^1) \neq (0, 0) \quad \text{und wegen} \\ (**) \text{ und (4.1.19) gilt } \overline{[\text{pr}_a(a_1), \dots, \text{pr}_a(a_r)]} = G/H_a .$$

Es ergibt sich daher :

$$\begin{aligned} 1 &= |f(k^1, x^1)| \left(\sum_{v=1}^r |1 - \overline{[\text{pr}_a(a_v), (k^1, x^1)]}| \right)^{-1} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq v \leq r} |\mathcal{F}_a(g_v)(k^1, x^1)| . \end{aligned}$$

Da dies für alle $1 \in \mathbb{N}^*$ gilt , andererseits aber $\mathcal{F}_a(g_v) \in C_0((G/H_a)^\wedge)$ für $v \in \{1, \dots, r\}$, liegt hier ein Widerspruch vor .

Nun zum Beweis von (*) :

Da $a_1, \dots, a_r$ nicht n.g.a.-($P, \hat{G} \setminus \{0\}$) sind , gilt :

$$\exists a \in A \quad \forall C, b > 0 \quad \exists (k, x) \in \mathbb{Z}^{n_a} \times F_a \quad \max_{1 \leq v \leq r} |1 - \overline{[\text{pr}_a(a_v), (k, x)]}| < C(1+|k|)^{-b}$$

$$(k, x) \neq (0, 0)$$

Sei $\alpha \in A$ so, daß obige Aussage gültig ist.

Für $C, b > 0$ hat man dann sogar:

$$S(C, b) := \{ (k, x) \in (\mathbb{Z}^{n_\alpha \times F_\alpha}) \setminus \{0\} \mid \max_{1 \leq v \leq r} |1 - [\overline{\text{pr}_\alpha(a_v)}, (k, x)]| < C(1 + |k|)^{-b} \}$$

hat unendlich viele Elemente, denn sonst wäre

$$C_0 := \min_{(k, x) \in S(C, b)} (\max_{1 \leq v \leq r} |1 - [\overline{\text{pr}_\alpha(a_v)}, (k, x)]|) > 0$$

(wie oben können für $(k, x) \in (\mathbb{Z}^{n_\alpha \times F_\alpha}) \setminus \{0\}$ nicht alle Ausdrücke $[\overline{\text{pr}_\alpha(a_v)}, (k, x)]$ gleichzeitig $= 1$ sein), was zur Folge hätte, daß für alle $(k, x) \in \mathbb{Z}^{n_\alpha \times F_\alpha}$, $(k, x) \neq (0, 0)$ gilt:

$$\max_{1 \leq v \leq r} |1 - [\overline{\text{pr}_\alpha(a_v)}, (k, x)]| \geq \begin{cases} C_0 & \text{falls } (k, x) \in S(C, b) \\ C(1 + |k|)^{-b} & \text{falls } (k, x) \notin S(C, b) \end{cases} \\ \geq \min \{C_0, C\} (1 + |k|)^{-b}$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Wahl von α .

Wir konstruieren nun die Folge $((k^1, x^1))_{1 \in \mathbb{N}^*}$, deren Existenz in (*) behauptet wird, durch Induktion:

Da $S(1, 1)$ unendlich ist, gibt es ein $(k^1, x^1) \in \mathbb{Z}^{n_\alpha \times F_\alpha}$, $k^1 \neq 0$, mit $\max_{1 \leq v \leq r} |1 - [\overline{\text{pr}_\alpha(a_v)}, (k^1, x^1)]| < (1 + |k^1|)^{-1}$

Seien $(k^1, x^1), \dots, (k^{s-1}, x^{s-1}) \in \mathbb{Z}^{n_\alpha \times F_\alpha}$ für $s \geq 1$ schon gefunden, so daß für $1 \leq l \leq s-1$ gilt:

$$\max_{1 \leq v \leq r} |1 - [\overline{\text{pr}_\alpha(a_v)}, (k^l, x^l)]| < (1 + |k^l|)^{-1} \quad \text{und} \quad 0 < |k^1| < \dots < |k^{s-1}|.$$

Da $S(1, s)$ unendlich ist, gibt es ein $(k^s, x^s) \in S(1, s)$ mit $|k^s| > |k^{s-1}|$, d.h.

$$\max_{1 \leq v \leq r} |1 - [\overline{\text{pr}_\alpha(a_v)}, (k^s, x^s)]| < (1 + |k^s|)^{-s}.$$

Damit ist (*) bewiesen.

Sei nun G eine profinite Gruppe.

Seien wieder $a_1, \dots, a_r \in G$ mit $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{D}(G)}$.

Hieraus folgt wegen (1.2.14) für jedes $\alpha \in A$:

$$\Delta_{\{\text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_r)\}}(\mathcal{D}(G/H_\alpha)) = \text{Kern } \mu_{G/H_\alpha}|_{\mathcal{D}(G/H_\alpha)} \quad (**)$$

(Bezeichnungen wie in (2.2.10) und 2.2.11).

Sei $\alpha \in A$. Da G/H_α endlich ist, stimmen $\mathcal{D}(G/H_\alpha)$ und $\mathcal{D}^*(G/H_\alpha)$ überein. Daher folgt aus (**) und (4.1.2) (angewendet auf die spezielle profinite Gruppe G/H_α): $\text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_r)$ n.g.a.- $(0, \sum_\alpha \setminus \{0\})$ (wir identifizieren wieder $\sum_\alpha = A(\sum, H_\alpha)$ mit dem dualen Objekt von G/H_α).

Insgesamt ergibt sich: $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(P^1, \sum \setminus \{0\})$ (vgl. (3.1.15)).

Für beliebige abelsche LK-Gruppen gilt daher der folgende Satz :

(4.1.22) Satz

Sei G eine beliebige abelsche LK-Gruppe .

- a) Gilt $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$ für ein endliches $B \subset G$, so ist G polythetisch mit $\wp(G) \leq \text{card}(B)$; da G polythetisch ist , ist G insbesondere kompakt erzeugt , d.h. $G \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times G_0$. ($n, m \in \mathbb{N}$, G_0 kompakte abelsche Gruppe) . Ist H eine diskrete Untergruppe von G mit $H \cong \mathbb{Z}^{n+m}$, $G/H \cong T^n \times G_0$, so sind die Elemente von B n.g.a.- $(P, H^\perp \setminus \{0\})$ (P wie in (4.1.1) und (3.1.2)).
- b) Ist G kompakt erzeugt , $G \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times G_0$ (wie in a)) und gibt es ein r ($\geq \wp(G) - (n+m)$) und $a_1, \dots, a_r \in G$, die n.g.a.- $(P, H^\perp \setminus \{0\})$ sind (wobei H wie in a) , P wie in (4.1.1) und (3.1.2)) , so gilt : $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r, h_1, \dots, h_{n+m}\}}(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$, falls $[h_1, \dots, h_{n+m}] = H$.

Beweis :

zu a) : Es gelte $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{A}(G)$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in G$.

Aus (4.1.19) erhalten wir : G ist polythetisch mit $\wp(G) \leq r$. Wegen Takamatsu [1] , Theorem 4 , gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ und eine kompakte abelsche Gruppe G_0 mit $G \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times G_0$; G ist daher kompakt erzeugt . Sei H eine diskrete Untergruppe von G mit $H \cong \mathbb{Z}^{n+m}$ und $G/H \cong T^n \times G_0$.

Wegen (1.2.14) hat man : $\Delta_{\{\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)\}}(\mathcal{A}(G/H)) = \text{Kern } \mu_{G/H} | \mathcal{A}(G/H)$; aus (4.1.21) folgt : $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(P, H^\perp \setminus \{0\})$.

zu b) : Sei nun G kompakt erzeugt , $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times G_0$ für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$, G_0 kompakte abelsche Gruppe , H sei eine diskrete Untergruppe von G , $H \cong \mathbb{Z}^{n+m}$, $G/H \cong T^n \times G_0$.

Seien $a_1, \dots, a_r \in G$ n.g.a.- $(P, H^\perp \setminus \{0\})$. Dann gilt :

$\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)$ n.g.a.- $(P, (G/H)^\wedge \setminus \{0\})$. Wegen (4.1.18) erhält man :

$$\Delta_{\{\pi_H(a_1), \dots, \pi_H(a_r)\}}(\mathcal{A}(G/H)) = \text{Kern } \mu_{G/H} | \mathcal{A}(G/H) .$$

(Nach a) muß offenbar gelten : $r \geq \wp(G/H)$, wobei $\wp(G/H) = \wp(G) - (n+m)$, da nach Takamatsu [1] , Theorem 4 und 5 gilt : $\wp(G) = \wp(G/H) + n + m$ (vgl. (4.1.10)) .

Die Behauptung folgt nun aus (1.2.14) .

Mit dem folgenden Satz werden wir für jede kompakte abelsche und jede profinite Gruppe G eine spezielle Teilmenge B finden können, die $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{A}(G)}$ erfüllt. Hieraus werden wir ebenfalls (4.1.15) beweisen können.

(4.1.23) Satz

Sei G eine kompakte Gruppe, $G = \text{proj. lim}(A, G/H_\alpha, \text{pr}_\alpha, \beta(\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$ wie in (1.1.3), $B \subset G$.

a) Sei G abelsch. B erfülle folgende Bedingung:

$$\forall \alpha \in A \quad \exists a_1, \dots, a_{r_\alpha} \text{ n.g.a.} - (p'_\alpha, H_\alpha^1 \setminus \{0\}) \quad (p'_\alpha \text{ wie in (2.2.4)})$$

Dann folgt: $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{A}(G)}$.

b) Sei G profinit. B erfülle folgende Bedingung:

$$\forall \alpha \in A \quad \exists a_1, \dots, a_{r_\alpha} \text{ n.g.a.} - (0, \Sigma_\alpha \setminus \{e_0\}) \quad (\Sigma_\alpha := A(\Sigma, H_\alpha)).$$

Dann folgt: $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{A}(G)}$.

Beweis:

zu a): B erfülle die genannte Bedingung.

Sei $\alpha \in A$.

$\text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_{r_\alpha})$ sind n.g.a. - $(p'_\alpha, (G/H_\alpha)^\wedge \setminus \{0\})$ und deshalb gilt nach (4.1.18): $\Delta_{\{\text{pr}_\alpha(a_1), \dots, \text{pr}_\alpha(a_{r_\alpha})\}}(\mathcal{A}(G/H_\alpha)) = \text{Kern } \mu_{G/H_\alpha}$.

Es gilt daher: $\Delta_{\{a_1, \dots, a_{r_\alpha}\}}(\mathcal{A}(G)) \supset \text{Kern } \mu_G \cap I_\alpha(\mathcal{A}(G/H_\alpha))^1$,

denn sei $g \in \mathcal{A}(G/H_\alpha)$, $\mu_G(I_\alpha(g)) = 0$:

Mit der Weilschen Formel folgt wieder: $\mu_{G/H_\alpha}(g) = \mu_G(I_\alpha(g)) = 0$;

daher gibt es $g_1, \dots, g_{r_\alpha} \in \mathcal{A}(G/H_\alpha)$, so daß

$$\begin{aligned} g &= \sum_{v=1}^{r_\alpha} g_v \cdot \text{pr}_\alpha(a_v) g_v, \text{ d.h. } I_\alpha(g) = \sum_{v=1}^{r_\alpha} I_\alpha(g_v) - I_\alpha(\text{pr}_\alpha(a_v) g_v) = \\ &= \sum_{v=1}^{r_\alpha} I_\alpha(g_v) - a_v I_\alpha(g_v) \end{aligned}$$

$$\in \Delta_{\{a_1, \dots, a_{r_\alpha}\}}(\mathcal{A}(G)).$$

Wegen $\mathcal{A}(G) = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha(\mathcal{A}(G/H_\alpha))$ folgt hieraus die Behauptung.

zu b): völlig analog zum Beweis von a).

1) dabei sei $I_\alpha := I_{H_\alpha}$ (vgl. (1.1.4))

(4.1.24) Beispiele

a) Sei $G = T^I$, wobei I eine beliebige unendliche Menge sei. Sei $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine nicht-Liouville-Zahl, $a := \pi_{\mathbb{Z}}(d) \in T$. Wir definieren folgende Elemente a^l ($l \in I$) von T^I :

Sei $a^l = (a^l_k)_{k \in I}$ mit

$$a^l_k := \begin{cases} a & \text{falls } k=l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (l, k \in I).$$

Es gilt: $T^I = \text{proj} \lim(A, T^J, \text{pr}_{JJ'}, (J, J' \in A, J \subset J'))$ mit $A := \{J \subset I \mid J \text{ endlich}\}$ (siehe (3.1.13)).

Sei $J \in A$, $J = \{l_1, \dots, l_r\}$.

Wegen (3.1.9)b) sind $\text{pr}_J(a^{l_1}), \dots, \text{pr}_J(a^{l_r})$ n.g.a.- $(p_J, \mathbb{Z}^J \setminus \{0\})$ (pr_J, p_J wie in (3.1.13)).

Sei $B := \{a^l \mid l \in I\}$. Dann erfüllt B die Voraussetzung von (4.1.23)a), d.h. es gilt: $\Delta_B(\mathcal{A}(T^I)) = \text{Kern } \mu_{T^I}|_{\mathcal{A}(T^I)}$.

Ist jedoch B_0 eine endliche Teilmenge von B , so folgt aus (4.1.19) und $\overline{[B_0]} \subset T^J$ für geeignetes $J \in A$ sofort, daß $\Delta_{B_0}(\mathcal{A}(T^I)) \neq \text{Kern } \mu_{T^I}|_{\mathcal{A}(T^I)}$.

b) Sei G eine beliebige kompakte abelsche Gruppe,

$G = \text{proj} \lim(A, G/H_\alpha, \text{pr}_{\alpha\beta} \mid (\alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta))$ wie in (4.1.23) und (2.1.8).

Da für jedes $\alpha \in A$ G/H_α eine LIE-Gruppe vom Typ $G/H_\alpha = T^{n_\alpha} \times F_\alpha$ ($n_\alpha \in \mathbb{N}$, F_α endliche abelsche Gruppe) ist, kann wegen (3.1.7) für jedes $\alpha \in A$ eine endliche Teilmenge B_α von G gewählt werden, deren Elemente n.g.a.- $(p'_\alpha, H_\alpha^\perp \setminus \{0\})$ sind.

$B := \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ erfüllt dann die Bedingung von (4.1.23)a);

d.h. es gilt: $\Delta_B(\mathcal{A}(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{\mathcal{A}(G)}$.

Ist G eine beliebige abelsche LK-Gruppe, so folgt (4.1.15) aus der Tatsache, daß G eine offene kompakt erzeugte Untergruppe G_1 besitzt (Hewitt/Ross [1], (5.14)) und G_1 eine diskrete Untergruppe H mit G/H kompakt hat, und aus den Vererbungssätzen (1.2.15) und (1.2.16).

c) Sei G eine beliebige profinite Gruppe ,
 $G = \text{proj lim}(A, G/H_\alpha, \text{pr}_\alpha)_\beta$ ($\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$) (wie in (2.2.10)).
 Sei $\alpha \in A$.

Da G/H_α endlich ist , gibt es eine endliche Teilmenge B_α von G
 mit $[\text{pr}_\alpha(B_\alpha)] = G/H_\alpha$. Die Elemente von B_α sind daher n.g.a.-
 $(0, A(\Sigma, H_\alpha) \setminus \{e_0\})$ (siehe (4.1.4)c)) .

$B := \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ erfüllt daher die Bedingung in (4.1.23)b) .

Es folgt also : $\Delta_B(\mathcal{Q}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G)$.

Ist G eine beliebige total unzusammenhängende LK-Gruppe , so
 erhält man hieraus die Aussage von (4.1.15) folgendermaßen :
 Nach Hewitt/Ross [1] , (7.7) besitzt G eine offene kompakte
 Untergruppe G_1 . Da nach Higgins [1] , 9. , Theorem 3 , G_1
 als kompakte total unzusammenhängende Gruppe profinit ist ,
 folgt (4.1.15) wiederum aus (1.2.16) und oben .

(4.1.25) Bemerkungen

a) Die Umkehrung von (4.1.23)b) ist offenbar gültig , denn
 bei einer profiniten Gruppe G folgt aus $\Delta_B(\mathcal{Q}(G)) = \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G)$
 für beliebiges $B \in G$: Die Projektionen $\text{pr}_\alpha(B)$ auf die endlichen
 Gruppen G/H_α ($\alpha \in A$) sind endlich und erfüllen wegen (1.2.14)
 $\Delta_{\text{pr}_\alpha(B)}(\mathcal{Q}(G/H_\alpha)) = \text{Kern } \mu_{G/H_\alpha} | \mathcal{Q}(G/H_\alpha)$. Wegen $\mathcal{Q}(G/H_\alpha) =$
 $= \mathcal{Q}'(G/H_\alpha)$ ($\alpha \in A$) sind daher wegen (4.1.2) für alle $\alpha \in A$
 die Elemente von $\text{pr}_\alpha(B)$ n.g.a.- $(0, A(\Sigma, H_\alpha) \setminus \{e_0\})$, was gleich-
 bedeutend dazu ist , daß B die Bedingung von (4.1.23)b) erfüllt.

b) Ob jedoch auch eine Umkehrung von (4.1.23)a) gilt , ist
 offen . Sogar im Fall $G = T$ ist ungeklärt , ob aus $\Delta_B(\mathcal{Q}(G)) =$
 $= \text{Kern } \mu_G | \mathcal{Q}(G)$ für ein $B \in T$ die Existenz von $a_1, \dots, a_r \in B$
 folgt , die n.g.a.- $(p, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ sind (mit $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$,
 $k \mapsto \ln(1+|k|)$) .

4.2 Die Fälle $\mathcal{Q}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$ für nicht-kompaktes G

Sei nun G eine nicht-kompakte LK-Gruppe (für kompaktes G stimmen $\mathcal{Q}'(G)$ und $\mathcal{E}'(G)$ bzw. $\mathcal{E}(G)$ und $\mathcal{Q}(G)$ überein).

Bei der Untersuchung des LILF-Problems auf $\mathcal{Q}'(G)$ und $\mathcal{E}(G)$ verwenden wir eine Verallgemeinerung folgender Idee von Meisters (siehe Meisters [1], 4., Theorem 2) für den Beweis von " $\Delta(\mathcal{Q}'(\mathbb{R})) = \mathcal{Q}'(\mathbb{R})$ " bzw. " $\Delta(\mathcal{E}(\mathbb{R})) = \mathcal{E}(\mathbb{R})$ ": Es gilt:

(4.2.1) $\mathcal{Q}'(\mathbb{R}) = \delta' * \mathcal{Q}'(\mathbb{R})$, wobei $\delta' := -\delta \circ d$ mit $d: \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{R})$, $f \mapsto \frac{d}{dx} f$.

Wegen $\delta' \in \text{Kern } \tilde{\Delta}_{\mathbb{R}} = \Delta(\mathcal{E}'(\mathbb{R}))$ folgt:

$$\delta' = \sum_{v=1}^r s_v - a_v s_v \quad \text{für geeignete } s_1, \dots, s_r \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \text{ und } a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}.$$

Für $s \in \mathcal{Q}'(\mathbb{R})$, $s = \delta' * \tilde{s}$ für geeignetes $\tilde{s} \in \mathcal{Q}'(\mathbb{R})$

$$\text{folgt: } s = \left(\sum_{v=1}^r s_v - a_v s_v \right) * \tilde{s} =$$

$$= \sum_{v=1}^r s_v * \tilde{s} - a_v (s_v * \tilde{s}) \in \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(\mathbb{R})).$$

Analog folgt aus $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \delta' * \mathcal{E}(\mathbb{R})$ und wegen $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) * \mathcal{E}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$, daß $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \Delta(\mathcal{E}(\mathbb{R}))$.

Für eine beliebige nicht-kompakte LK-Gruppe gilt nun zu - nächst:

(4.2.2) Lemma

Sei G eine nicht-kompakte LK-Gruppe.

Es gebe ein $T \in \mathcal{E}'(G)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) die Abbildung $\varphi_T: \mathcal{Q}'(G) \rightarrow \mathcal{Q}'(G)$, $s \mapsto T * s$ (vgl. (1.1.18)), ist surjektiv, d.h.

$$\mathcal{Q}'(G) = T * \mathcal{Q}'(G)$$

2) $T \in \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}'(G))$.

Dann gilt:

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \mathcal{Q}'(G).$$

Beweis:

Sei $S \in \mathcal{D}'(G)$. Wegen 1) gibt es wieder ein $\tilde{S} \in \mathcal{D}'(G)$ mit $S = T * \tilde{S}$.

Wegen 2) gilt: $T = \sum_{\nu=1}^r S_{\nu} - a_{\nu} S_{\nu}$ für geeignete $S_1, \dots, S_r$

$\in \mathcal{E}'(G)$.

Insgesamt: $S = \left(\sum_{\nu=1}^r S_{\nu} - a_{\nu} S_{\nu} \right) * S = \sum_{\nu=1}^r S_{\nu} * S - a_{\nu} (S_{\nu} * S)$
 $\in \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}'(G))$.

Analog beweist man (mit Hilfe der Tatsache, daß $\mathcal{E}'(G) * \mathcal{E}(G) \subset \mathcal{E}(G)$ (siehe (1.1.19)b)) :

(4.2.3) Lemma

Sei G eine nicht-kompakte LK-Gruppe.

Es gebe ein $T \in \mathcal{E}'(G)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) die Abbildung $\psi_T: \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$, $f \mapsto T * f$, ist surjektiv, d.h.

$$\mathcal{E}(G) = T * \mathcal{E}(G).$$

2) $T \in \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}'(G))$.

Dann gilt:

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G).$$

Im folgenden weisen wir nun nach, daß die Voraussetzungen von (4.2.2) und (4.2.3) erfüllt sind, falls G $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$ als direkten Faktor besitzt, d.h. $G = \mathbb{R} \times F$ bzw. $G = \mathbb{Z} \times F$ (F geeignete LK-Gruppe):

(4.2.4) Definition

Sei G eine LK-Gruppe.

a) Wir sagen, G ist vom Typ I, falls $G = \mathbb{R} \times F$ für eine geeignete LK-Gruppe F .

b) Wir sagen, G ist vom Typ II, falls $G = \mathbb{Z} \times F$ für eine geeignete LK-Gruppe F .

Zunächst zum Typ I:

Sei G eine LK-Gruppe vom Typ I, $G = \mathbb{R} \times F$ (F LK-Gruppe).

Wir setzen :

(4.2.5) $T := \delta' \otimes \delta_F$ (δ' wie in (4.2.1), δ_F wie in (1.1.21)).

Nach (1.1.16) und wegen $\text{supp } T = \{e\}$ gilt offenbar: $T \in \mathcal{E}'(G)$.
Es folgt :

(4.2.6) Satz

Seien G und T wie oben .

Folgende Aussagen sind gültig:

a) ψ_T (wie in (4.2.2)) besitzt eine Rechtsinverse ; insbesondere gilt:

$$\mathcal{D}'(G) = T * \mathcal{D}'(G) .$$

b) ψ_T (wie in (4.2.3)) besitzt eine Rechtsinverse ; insbesondere gilt :

$$\mathcal{E}(G) = T * \mathcal{E}(G) .$$

Beweis:

Wir beweisen zunächst a) :

Man hat : (vgl. Schwartz [1] , II , §4)

$I : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $f \longmapsto I(f)$, mit $I(f)(t) := \int_{-\infty}^t (f(s) - f_0(s)) ds$
für $t \in \mathbb{R}$ ($f_0 := \mu_{\mathbb{R}}(f) g_0$, wobei $g_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\mu_{\mathbb{R}}(g_0) = 1$
eine beliebige feste Funktion sei)

ist eine stetige lineare Abbildung (bzgl. der üblichen Topologie von $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) mit folgender Eigenschaft:

$$(*) \quad I(\delta' * f) = f \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) .$$

Da $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(F)$ (siehe (1.1.15)) induziert die
in beiden Argumenten stetige bilineare Abbildung

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(F) \longrightarrow \mathcal{D}(G) , (f_1, f_2) \longmapsto I(f_1) \otimes f_2$$

eine stetige lineare Abbildung $\tilde{I} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}(G)$ mit

$$(**) \quad \tilde{I}(T * f) = f \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(G) :$$

denn für $f \in \mathcal{D}(G)$, $f = f_1 \otimes f_2$ ($f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $f_2 \in \mathcal{D}(F)$) gilt:
 $\tilde{I}(T * f) = \tilde{I}((\delta' \otimes \delta_F) * (f_1 \otimes f_2)) = \tilde{I}((\delta' * f_1) \otimes f_2) = I(\delta' * f_1) \otimes f_2 =$
 $= f_1 \otimes f_2 = f$; da $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(F)$ ein dichter Teilraum von
(*)

$\mathcal{D}(G)$ ist , folgt hieraus (**).

Wir zeigen nun : die Abbildung $-\tilde{I}^t$, wobei $\tilde{I}^t$ die Transponierte von $\tilde{I}$ sei (d.h. $\tilde{I}^t : \mathcal{D}'(G) \longrightarrow \mathcal{D}'(G)$, $S \longmapsto S \circ \tilde{I}$) , ist

rechtsinvers zu φ_T :

Sei $S \in \mathcal{D}'(G)$, $f \in \mathcal{D}(G)$. Wegen $\tilde{T} = -T$ (vgl. (1.1.20)c)) gilt:
 $\varphi_T \circ (-\tilde{T}^t)(S)(f) = (T * (-\tilde{T}^t)(S))(f) = (-\tilde{T}^t)(S)((-T)*f) =$
 $= S(\tilde{T}(T*f)) = S(f)$ wegen (**), d.h. $\varphi_T \circ (-\tilde{T}^t) = \text{id } \mathcal{D}'(G)$.

Damit ist a) gezeigt, denn aus Obigem folgt insbesondere, daß φ_T surjektiv ist.

zu b) :

Analog zu a) konstruieren wir zuerst eine stetige lineare Abbildung $J : \mathcal{E}'(G) \rightarrow \mathcal{E}'(G)$ mit der Eigenschaft

$$(+)\quad J(T*S) = S \quad \text{für alle } S \in \mathcal{E}'(G)$$

und transponieren diese dann zu einer Abbildung $J^t : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ (man beachte, daß $\mathcal{E}(G)$ reflexiv ist und daher starkes Dual von $\mathcal{E}'(G)$ ist), deren Negatives schließlich rechtsinvers zu φ_T sein wird.

Sei $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiert durch : $Y(f) := \int_0^\infty f(x) dx$ ($f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$), d.h. Y ist die "Heaviside-Funktion" (vgl. Schwartz [1], II, §2).

Wir definieren nun $J : \mathcal{E}'(G) \rightarrow \mathcal{E}'(G)$ folgendermaßen:

Sei $S \in \mathcal{E}'(G)$.

$J(S) := (S - \delta_{\mathbb{R}} \otimes S_0) * (Y \otimes \delta_F)$, wobei $S_0 \in \mathcal{E}'(F)$ mit $S_0(f) := S(1_{\mathbb{R}} \otimes f)$ für $f \in \mathcal{D}(F)$ ($1_{\mathbb{R}}$ sei die konstante Funktion $\equiv 1$ auf $\mathbb{R}$); offenbar gilt $\text{supp } S_0 \subset \text{pr}_2(\text{supp } S)$.

Daß $J(S)$ ein Element von $\mathcal{D}'(G)$ ist, folgt aus der Definition.

Wir zeigen nun, daß $J(S) \in \mathcal{E}'(G)$, d.h. $\text{supp } J(S)$ kompakt.

Genauer gilt:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, so daß $\text{pr}_1(\text{supp } S) \subset [-\alpha, \alpha]$, $\varepsilon > 0$; weiter sei $U \subset F$ eine offene relativkompakte Umgebung von $\text{pr}_2(\text{supp } S)$ in F . Dann folgt: $\text{supp } J(S) \subset [-(\alpha + \varepsilon), \alpha + \varepsilon] \times \bar{U}$.

Beweis: Seien α, ε und U wie oben. Sei V eine kompakte Umgebung von $\text{pr}_2(\text{supp } S)$ in F mit $V \subset U$. Man kann $k \in \mathcal{D}(G)$ so wählen, daß gilt: $k|_{[-(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}), \alpha + \frac{\varepsilon}{2}] \times V} = 1$, $\text{supp } k \subset [-(\alpha + \varepsilon), \alpha + \varepsilon] \times \bar{U}$ (Bruhat [1], 1., Prop. 2)).

Sei nun $h \in \mathcal{D}(G)$ mit $\text{supp } h \cap [-(\alpha + \varepsilon), \alpha + \varepsilon] \times \bar{U} = \emptyset$.

Es gilt:

$J(S)(h) = (S - \delta_{\mathbb{R}} \otimes S_0)(kH)$, wobei $H := h * (Y \otimes \delta_F) \in \mathcal{E}(G)$;

Wir zeigen: $kH = k\tilde{H}$ mit $\tilde{H}(x, y) := H(0, y)$ für $x \in \mathbb{R}, y \in F, \tilde{H} \in \mathcal{E}(G)$.

Zunächst : $H(x,y) = \int_0^{\infty} h(s,y) ds$ für $x \in \mathbb{R}, y \in F$.

Sei $y \in \text{pr}_2(\text{supp } h) \cap \bar{U}$. Dann kann $h(s,y) \neq 0$ nur für $s \in \mathbb{R}$ mit $s \in [-(a+\varepsilon), a+\varepsilon]$ gelten.

Es folgt: (für $x \in \mathbb{R}$)

$$k(x,y)H(x,y) = \begin{cases} k(x,y) \int_0^{\infty} h(s,y) ds & \text{falls } x \in [-(a+\varepsilon), a+\varepsilon] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= k(x,y)\tilde{H}(x,y).$$

Für $y \in \text{pr}_2(\text{supp } h) \setminus \bar{U}$ erhält man : (für $x \in \mathbb{R}$)

$$k(x,y)H(x,y) = 0 = k(x,y)\tilde{H}(x,y), \text{ da } k(x,y) = 0.$$

Ist schließlich $y \in F \setminus \text{pr}_2(\text{supp } h)$, so folgt :

$h(s,y) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und damit :

$$k(x,y)H(x,y) = 0 = k(x,y)\tilde{H}(x,y) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es ergibt sich daher :

$$\begin{aligned} J(S)(h) &= (S - d_{\mathbb{R}} \otimes S_0)(k\tilde{H}) = (S - d_{\mathbb{R}} \otimes S_0)(\tilde{H}) = \\ &= S(\tilde{H}) - d_{\mathbb{R}} \otimes S_0(\tilde{H}) = S(\tilde{H}) - S(\tilde{H}) = 0. \end{aligned}$$

Die Abbildung J ist daher wohldefiniert ; sie ist offenbar linear.

J ist stetig auf $\mathcal{E}'(G)$, denn sei $(S_{\iota})_{\iota \in I} \in \mathcal{E}'(G)$ mit

$S_{\iota} \longrightarrow 0$, so gibt es ein $K \subset G$, K kompakt, mit :

$\text{supp } S_{\iota} \subset K$, $S_{\iota} \longrightarrow 0$ bzgl. der Topologie von $\mathcal{D}'(G)$

(vgl. Bruhat [1], 4., Prop.6b) . Daher : $J(S_{\iota}) \longrightarrow 0$

in $\mathcal{D}'(G)$. Da aber gemäß obigen Überlegungen gilt :

$\text{supp } J(S_{\iota}) \subset K'$ für eine geeignete kompakte Umgebung K' von K

für alle $\iota \in I$, folgt : $J(S_{\iota}) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}'(G)$ (siehe nochmals Bruhat [1], 4., Prop.6b) .

Es gilt weiter:

$$(+)\ J(T*S) = S \text{ für alle } S \in \mathcal{E}'(G) :$$

denn sei $S \in \mathcal{E}'(G)$, dann ergibt sich :

$$\begin{aligned} J(T*S) &= (T*S - d_{\mathbb{R}} \otimes (T*S)_0) * (Y \otimes d_F) = \\ &= ((\delta' \otimes d_F) * S) * (Y \otimes d_F) - (d_{\mathbb{R}} \otimes (T*S)_0) * (Y \otimes d_F) = \\ &= S * ((\delta' \otimes d_F) * (Y \otimes d_F)) - (Y \otimes ((\delta' \otimes d_F) * S)_0) \quad (\text{wegen (1.1.21)}) \\ &= S * d_G = 0 = S, \end{aligned}$$

denn :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), g \in \mathcal{D}(F) &\longrightarrow Y \otimes ((\delta' \otimes d_F) * S)_0 (f \otimes g) = \\ &= Y(f) (\delta' \otimes d_F) * S (1 \otimes g) = \\ &= -Y(f) S(\delta'(1)g) = 0. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{E}(G)$ reflexiv ist, stimmt $\mathcal{E}(G)$ mit dem starken Dual von $\mathcal{E}'(G)$ überein.

Die Transponierte J^T von J kann daher als eine Abbildung von $\mathcal{E}(G)$ in $\mathcal{E}(G)$ angesehen werden.

Wir zeigen nun :

(++) $-J^T$ ist rechtsinvers zu Ψ_T .

Sei $f \in \mathcal{E}(G)$, $S \in \mathcal{E}'(G)$.

$$S(\Psi_T(J^T(f))) = S(T^*(J^T(f))) = -(T^*S)(J^T(f)) = -J(T^*S)(f) = -S(f),$$

(1.1.20)c) (+)

d.h. $(\Psi_T \circ (-J^T))(f) = f$ für alle $f \in \mathcal{E}(G)$.

Da wegen (4.1.8) für alle $r \geq 2$ $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r \in \mathbb{R}$ existieren mit $\Delta_{\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r\}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R})) = \text{Kern } \tilde{\mu}_R^{(1)}$ und offenbar $\delta' \in \text{Kern } \tilde{\mu}_R$ gilt, folgt:

(4.2.7) Theorem

Sei G eine LK-Gruppe vom Typ I.

Dann gibt es für jedes $r \geq 2$ Elemente $a_1, \dots, a_r \in G$, so daß

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}'(G)) = \mathcal{D}'(G) \text{ und } \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G).$$

Beweis: Sei $G = \mathbb{R} \times F$ (F geeignete LK-Gruppe).

Sei $r \geq 2$ und $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r \in \mathbb{R}$ so, daß $\Delta_{\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r\}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R})) = \text{Kern } \tilde{\mu}_R$.

Für $v \in \{1, \dots, r\}$ definiere man : $a_v := (\tilde{a}_v, e_F) \in G$
(e_F sei das Einselement von F).

Dann gilt : T (wie in (4.2.5) ist ein Element von

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}'(G)) :$$

$$\text{denn } T = \delta' \otimes \delta_F = \left(\sum_{v=1}^r S_v - \tilde{a}_v S_v \right) \otimes \delta_F$$

für geeignete $S_1, \dots, S_r \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$

$$= \sum_{v=1}^r S_v \otimes \delta_F - \tilde{a}_v S_v \otimes \delta_F =$$

$$= \sum_{v=1}^r S_v \otimes \delta_F - a_v (S_v \otimes \delta_F)$$

$$\in \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}'(G)).$$

1) Genauer gilt nach (4.1.8): Für alle $r \geq 1$ existieren $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r$ n.g.a. $-(\mathbb{Z}; p, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (mit $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+, k \mapsto \ln(1+|k|)$), woraus sich ergibt: $\Delta_{\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r, 1\}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R})) = \text{Kern } \tilde{\mu}_R$.

Aus (4.2.2) und (4.2.6) folgt nun :

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \mathcal{Q}'(G) ,$$

während aus (4.2.3) und (4.2.6) resultiert:

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G) .$$

Nun zum Typ II :

Sei G eine LK-Gruppe vom Typ II , $G = \mathbb{Z} \times F$ (F LK-Gruppe) .

Wir definieren :

$$(4.2.8) \quad T := \delta - (1, e_F) \delta \quad (e_F \text{ sei das Einselement von } F) .$$

Trivialerweise gilt nun $T \in \Delta_{\{(1, e_F)\}}(\mathcal{Q}'(G))$.

Weiter folgt :

(4.2.9) Satz

Sei G und T wie eben .

Dann gelten folgende Aussagen:

a) φ_T (wie in (4.2.2)) besitzt eine Rechtsinverse , ist also insbesondere surjektiv , d.h.

$$\mathcal{Q}'(G) = T * \mathcal{Q}'(G) .$$

b) ψ_T (wie in (4.2.3)) besitzt ebenfalls eine Rechtsinverse und ist daher surjektiv , d.h.

$$\mathcal{E}(G) = T * \mathcal{E}(G) .$$

Beweis:

zu a) :

Sei $I : \mathcal{Q}(\mathbb{Z}) \mapsto \mathcal{Q}(\mathbb{Z})$, $f \mapsto I(f)$ mit

$$I(f)(k) := \sum_{l \in k} f(1) - f_0(1) \quad \text{für } f \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}) , k \in \mathbb{Z} ;$$

dabei sei $f_0 := \mu_{\mathbb{Z}}(f)g_0$, $g_0 \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z})$ fest mit $\mu_{\mathbb{Z}}(g_0) = 1$.

I ist linear und stetig mit folgender Eigenschaft:

$$(*) \quad I(f - {}^1f) = f \quad \text{für alle } f \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}) ;$$

denn für $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z})$ gilt : $({}^1f)_0 = f_0$ (siehe oben) , d.h.

$$I(f - {}^1f)(k) = \sum_{l \in k} (f(1) - f_0(1)) - \sum_{l \in k} (f(1-1) - f_0(1)) = f(k)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wie im Beweis von (4.2.6) folgt nun aus $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{D}(F)$ die Existenz einer stetigen linearen Abbildung $\tilde{Y} : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{D}(G)$ mit folgender Eigenschaft:

$$(**) \tilde{Y}(T*f) = f \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(G).$$

Sei $\tilde{Y}^t : \mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$ die Transponierte von $\tilde{Y}$,

$$I_0 : \mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G) \text{ sei definiert durch: } I_0(S) := (-1, e_F)(-\tilde{Y}^t(S)).$$

Dann gilt: $\varphi_T \circ I_0 = \text{id}_{\mathcal{D}'(G)}$, denn für $S \in \mathcal{D}'(G)$ folgt:

$$\varphi_T(I_0(S)) = T * I_0(S) = I_0(S) - (-1, e_F)I_0(S) =$$

$$= -(-1, e_F)(S \circ \tilde{Y}) + S \circ \tilde{Y}, \text{ d.h. für } f \in \mathcal{D}(G):$$

$$\varphi_T(I_0(S))(f) = S(\tilde{Y}(f)) - S(\tilde{Y}((-1, e_F)f)) = S(\tilde{Y}(f - (-1, e_F)f)) =$$

$$= S(\tilde{Y}(T*f)) = S(f) \quad (**)$$

zu b) :

Wie im Beweis zu (4.2.6)b) definieren wir :

$$J : \mathcal{E}'(G) \rightarrow \mathcal{E}'(G), S \mapsto (S - \delta_{\mathbb{Z}} \otimes S_0) * (Y \otimes \delta_F),$$

wobei jetzt $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ definiert sei durch :

$$Y(f) := \sum_{l=0}^{\infty} f(l) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \quad \text{und}$$

$$S_0 \in \mathcal{E}'(F) \text{ mit } S_0(g) := S(1_{\mathbb{Z}} \otimes g) \quad (1_{\mathbb{Z}} \text{ sei nun die konstante Funktion } \equiv 1 \text{ auf } \mathbb{Z});$$

wieder gilt: $\text{supp } S_0 \subset \text{pr}_2(\text{supp } S)$.

Offenbar ist $J(S) \in \mathcal{D}'(G)$.

Man kann nun zeigen, daß gilt:

Sei $l_0 \in \mathbb{N}^*$ so, daß $\text{pr}_1(\text{supp } S) \subset \{l \in \mathbb{Z} \mid |l| \leq l_0\}$, $U \subset F$ eine offene relativkompakte Umgebung von $\text{pr}_2(\text{supp } S)$ in F .

Dann ist $\text{supp } J(S) \subset \{l \in \mathbb{Z} \mid |l| \leq l_0\} \times \bar{U}$.

Dies beweist man wie im Beweis zu (4.2.6.)b)

(man benutze auch hier eine Hilfsfunktion $k \in \mathcal{D}(G)$ mit

$k(\{l \in \mathbb{Z} \mid |l| \leq l_0\} \times V) = 1$ für eine kompakte Umgebung V von

$\text{pr}_2(\text{supp } S)$ in F , $V \subset U$, und $\text{supp } k \subset \{l \in \mathbb{Z} \mid |l| \leq l_0\} \times U$;

d.h. $k \cdot (S - \delta_{\mathbb{Z}} \otimes S_0) = S - \delta_{\mathbb{Z}} \otimes S_0$)¹⁾.

1) zu "•" vgl. (1.1.17).

J ist also wohldefiniert ; offenbar ist J auch linear .
 Daß J stetig ist , zeigt man, wie im Beweis zu (4.2.6b) ,
 mit Hilfe von Bruhat [1] , 4. , Prop. 6b) .

J hat wieder die Eigenschaft:

(+) $J(T*S) = S$ für alle $S \in \mathcal{E}'(G)$, denn sei $S \in \mathcal{E}'(G)$:

$$\begin{aligned} J(T*S) &= J(S - (1, e_F)S) = \\ &= ((S - (1, e_F)S) - \delta_{\mathbb{Z}} \otimes (S - (1, e_F)S)_o) * (Y \otimes \delta_F) = \\ &= (S - (1, e_F)S) * (Y \otimes \delta_F) \quad (\text{da } (S - (1, e_F)S)_o = 0) \\ &= (S*T) * (Y \otimes \delta_F) \quad (\text{wegen (1.1.21)}) \\ &= S * (T * (Y \otimes \delta_F)) = S * ((Y - {}^1Y) \otimes \delta_F) = S * (\delta_{\mathbb{Z}} \otimes \delta_F) = S * \delta_G = S. \end{aligned}$$

Aufgrund der Reflexivität von $\mathcal{E}(G)$ erhält man durch Transposition von J wieder eine lineare Abbildung $J^t : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$.

Wir setzen nun :

$$J_0 : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G) , f \mapsto -(-1, e_F)(J^t(f)) .$$

Dann ist J_0 rechtsinvers zu ψ_T :

Sei $f \in \mathcal{E}(G)$, $S \in \mathcal{E}'(G)$.

$$\begin{aligned} S(\psi_T(J_0(f))) &= S(J_0(f) - (1, e_F)J_0(f)) = \\ &= S(J^t(f) - (-1, e_F)J^t(f)) = T*S(J^t(f)) = J(T*S)(f) = S(f) . \end{aligned} \quad (+)$$

Aus (4.2.9) folgt sofort :

(4.2.10) Theorem

Sei G eine LK-Gruppe vom Typ II , $G = \mathbb{Z} \times F$ (F LK-Gruppe) .

Dann gilt :

$$\Delta_{\{(1, e_F)\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \mathcal{Q}'(G) \quad \text{und} \quad \Delta_{\{(1, e_F)\}}(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G) .$$

Beweis:

Wegen $T = \delta - (1, e_F)\delta \in \Delta_{\{(1, e_F)\}}(\mathcal{Q}'(G))$ folgt aus

$$(4.2.2) \text{ und } (4.2.9) : \Delta_{\{(1, e_F)\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \mathcal{Q}'(G) ,$$

$$\text{und aus (4.2.3) und (4.2.9) : } \Delta_{\{(1, e_F)\}}(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G) .$$

(4.2.11) Folgerung

Sei G eine nicht-kompakte kompakt erzeugte abelsche LK-Gruppe.

Dann gibt es für $r \geq 2$ Elemente $a_1, \dots, a_r \in G$, so daß

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{Q}'(G)) = \mathcal{Q}'(G) \quad \text{und} \quad \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G) .$$

Beweis :

Da G kompakt erzeugt und abelsch ist , gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ und eine kompakte abelsche Gruppe F , so daß $G \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times F$ (Hewitt/Ross [1] , (9.14)) .

Da G nicht kompakt ist , gilt entweder $n > 0$ oder $m > 0$, d.h. G ist entweder vom Typ I oder vom Typ II .

Die Behauptung folgt nun aus (4.2.7) bzw. aus (4.2.10) .

Aus (1.2.20) und (1.2.23) erhalten wir :

(4.2.12) Satz

Sei G eine LK-Gruppe.

Besitzt G eine offene Untergruppe H vom Typ I oder vom Typ II , so gibt es für alle $r \geq 2$ Elemente $a_1, \dots, a_r \in H$, so daß

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{D}'(G)) = \mathcal{D}'(G) \quad \text{und} \quad \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G) .$$

Beweis:

Aus (4.2.7) bzw. (4.2.10) und (1.2.20) folgt die Behauptung für $\mathcal{D}'(G)$, aus (4.2.7) bzw. (4.2.10) und (1.2.23) für $\mathcal{E}(G)$.

(4.2.13) Beispiel

Sei G eine abelsche LK-Gruppe , G nicht kompakt .

Aus Hewitt/Ross [1] , (5.14) folgt , daß G eine kompakt erzeugte (abelsche) offene Untergruppe H besitzt .

Da jedoch aus der Nicht-Kompaktheit von G keineswegs folgen muß , daß auch H nicht kompakt ist , muß man hier 2 Fälle unterscheiden :

Fall 1 : G besitzt eine nicht-kompakte offene kompakt erzeugte Untergruppe H

Fall 2 : Jede kompakt erzeugte offene Untergruppe H von G ist kompakt .

Im Fall 1 besitzt G offenbar eine offene Untergruppe H vom Typ I oder vom Typ II , d.h. aus (4.2.12) folgt , daß es für alle $r \geq 2$ $a_1, \dots, a_r \in G$ gibt mit $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(E) = E$ für $E \in \{\mathcal{D}'(G), \mathcal{E}(G)\}$.

Im Fall 2 jedoch gilt für jede offene kompakt erzeugte Untergruppe H von G : $\text{codim } \Delta(E) \geq 1$ für $E \in \{\mathcal{D}'(H), \mathcal{E}(H)\}$, da H kompakt ist und daher $\mathcal{D}'(H) = \mathcal{E}'(H)$, $\mathcal{E}(H) = \mathcal{D}(H)$,

$$\Delta(\mathcal{E}'(H)) \subset \text{Kern } \mu_H, \Delta(\mathcal{M}(H)) \subset \text{Kern } \mu_H.$$

Aus (1.2.19) folgt:

$$\Delta_H(\mathcal{M}'(G)) \subset \mathcal{M}'(G), \Delta_H(\mathcal{E}(G)) \subset \mathcal{E}(G).$$

Ob jedoch trotzdem $\Delta(\mathcal{M}'(G)) = \mathcal{M}'(G)$ bzw. $\Delta(\mathcal{E}(G)) = \mathcal{E}(G)$ gilt, ist offen.

4.3 Weitere linksinvariante Teilräume E von $\mathcal{Q}'(G)$ mit $E = \Delta(E)$

Sei G eine beliebige LK-Gruppe, E ein linksinvarianter Teilraum von $\mathcal{Q}'(G)$, $B \in G$.

(4.3.1) Lemma

Wenn E eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt, gilt

$$\Delta_B(E) = E :$$

a) $E'(G) * E \subset E$, $E = T_0 * E$ für ein $T_0 \in \Delta_B(E'(G))$

b) $E = T_0 * F$ für einen geeigneten linksinvarianten linearen Teilraum F von $E'(G)$ mit $F * F \subset F$ und für ein $T_0 \in \Delta_B(E)$.

Beweis:

zu a): Diese Aussage stellt eine Verallgemeinerung von (4.2.2) dar und wird völlig analog bewiesen.

zu b): Seien F und T_0 gemäß b).

Wegen $T_0 \in \Delta_B(E)$ gibt es $S_1, \dots, S_r \in F$ und $a_1, \dots, a_r \in B$ mit

$$T_0 = \sum_{v=1}^r T_0 * S_v - a_v(T_0 * S_v).$$

Für $S \in F$ gilt daher:

$$\begin{aligned} T_0 * S &= \left(\sum_{v=1}^r T_0 * S_v - a_v(T_0 * S_v) \right) * S = \sum_{v=1}^r (T_0 * S_v) * S - (a_v(T_0 * S_v)) * S = \\ &= \sum_{v=1}^r T_0 * (S_v * S) - a_v(T_0 * (S_v * S)) \in \Delta_B(T_0 * F) = \Delta_B(E). \end{aligned}$$

(4.3.2) Beispiele

a) Sei $G = T$.

Sei $E := \mathcal{Q}_1'(\mathcal{Q}'(T))$ (vgl. (2.2.2)).

Dann gilt: $E = \mathcal{Q}' * \mathcal{Q}'(T)$ ($\mathcal{Q}' := \mathcal{Q}_1'(\mathcal{Q})$).

Wegen $\mathcal{Q}' \in \text{Kern } \tilde{\mu}_T$ folgt (siehe (2.2.2)b)):

$$\tilde{\mathcal{Q}}'(\mathcal{Q}') \in \mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad (p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+, k \mapsto \ln(1 + |k|)).$$

Aus (3.1.8), (3.1.2)(2) und (2.3.15) folgt mit f_a wie in (2.3.1):

$$\text{Es gibt ein } a \in T \text{ mit } \langle f_a \rangle_{\mathcal{A}_p(\mathbb{Z})} = \mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$

Wegen (2.3.13) hat man sogar:

$$\tilde{\mathcal{Q}}'(\mathcal{Q}') \in \langle f_a \rangle_{\mathcal{A}_p(\mathbb{Z} \setminus \{0\})}, \text{ was äquivalent ist zu:}$$

$\mathcal{Q}' = S - aS$ für ein geeignetes $S \in \mathcal{Q}_1'(\mathcal{Q}'(T))$ (wegen (2.2.2)c)), d.h. $\mathcal{Q}' \in \Delta_{\{a\}}(\mathcal{Q}_1'(\mathcal{Q}'(T)))$.

Damit sind die Voraussetzungen von (4.3.1)b) erfüllt (für

$$F := \mathcal{Q}'(T), T_0 := \delta'.$$

$$\text{Es gilt deshalb: } \tilde{\sigma}_1(\mathcal{Q}'(T)) = \Delta_{\{a\}}(\tilde{\sigma}_1(\mathcal{Q}'(T))).$$

Ist G eine LK-Gruppe von der Form $G = T \times F$ (F beliebige LK-Gruppe), so gilt:

$E := (\delta' \otimes \delta_F) * \mathcal{E}'(G)$ ist ein linksinvarianter Teilraum von $\mathcal{E}'(G)$ (siehe (1.1.21));

$$\begin{aligned} \text{wegen } \delta' \otimes \delta_F &= (S - {}^a S) \otimes \delta_F \quad (S, a \text{ wie oben}) \\ &= S \otimes \delta_F - {}^a S \otimes \delta_F = S \otimes \delta_F - (a, e_F)(S \otimes \delta_F) \in \Delta_{\{(a, e_F)\}}(E) \\ & \quad (\text{denn } S \otimes \delta_F = (\delta' * \tilde{S}) \otimes \delta_F \text{ für geeignetes } \tilde{S} \in \mathcal{Q}'(T) \quad \{(a, e_F)\}} \\ & \quad = (\delta' \otimes \delta_F) * (\tilde{S} \otimes \delta_F) \in E) \end{aligned}$$

$$\text{folgt nach (4.3.1)b): } E = \Delta_{\{(a, e_F)\}}(E).$$

Speziell: $G = T^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$); sei, $1 \leq j \leq n$, a wie oben.

Dann hat man mit $a^j := (a_i^j)_{1 \leq i \leq n}$, $a_i^j := \begin{cases} a & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Delta_{\{a^j\}}(\tilde{\sigma}_j(\mathcal{Q}'(T^n))) = \tilde{\sigma}_j(\mathcal{Q}'(T^n)).$$

In diesem Fall kann man für beliebige $a_1, \dots, a_r \in T^n$ ($r \geq 1$) wegen (2.2.2)c) sogar eine Charakterisierung geben, wann

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\tilde{\sigma}_j(\mathcal{Q}'(T^n))) = \tilde{\sigma}_j(\mathcal{Q}'(T^n)) \text{ gilt } (1 \leq j \leq n):$$

denn wegen $\tilde{\sigma}_j(\mathcal{Q}'(T^n)) = \mathcal{A}_p((\mathbb{Z}^n)^j)$ (siehe (2.2.2)c))

gilt: $(S_j := (\mathbb{Z}^n)^j, f_{S_j} \text{ zu } S_j \text{ wie in (2.1.9)})$

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\tilde{\sigma}_j(\mathcal{Q}'(T^n))) = \tilde{\sigma}_j(\mathcal{Q}'(T^n)) \iff$$

$$\iff \langle f_{a_1} f_{S_j}, \dots, f_{a_r} f_{S_j} \rangle \mathcal{A}_p(S_j) = \mathcal{A}_p(S_j) \quad (f_{a_i} \quad (1 \leq i \leq r) \text{ wie in (2.3.1)})$$

$$\iff \exists_{C, b > 0} \bigvee_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ k_j \neq 0}} \llbracket \langle k, a_i \rangle \rrbracket \geq C(1+|k|)^{-b} \quad (\text{siehe (2.3.15)})$$

$$\iff a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.-(p, } (\mathbb{Z}^n)^j)$$

b) Im Gegensatz zu a) gilt im Fall $G = \mathbb{R} \times F$ (F beliebige LK-Gruppe):

Sei $E := (\delta' \otimes \delta_F) * \mathcal{E}'(G)$ (δ' wie in (4.2.1)).

Dann:

$$\Delta(E) \subsetneq E.$$

Beweis:

Wir zeigen: $\dim \text{LI}(E) \geq 1$.

1) Sogar im Fall $G = T^n \times F$, $n \in \mathbb{N}^*$, F endliche abelsche Gruppe; der Einfachheit halber wollen wir uns hier jedoch auf $G = T^n$ beschränken.

Sei hierzu $J: \mathcal{E}'(G) \longrightarrow \mathcal{E}'(G)$ wie im Beweis zu (4.2.6)b) .
Es gilt :

$S \in \mathcal{E}'(G) \implies J((\delta' \otimes \delta_F) * S) = S$, denn :

für $f \in \mathcal{D}(F)$, $S \in \mathcal{E}'(G)$ hat man :

$$\begin{aligned} ((\delta' \otimes \delta_F) * S)_0(f) &= ((\delta' \otimes \delta_F) * S)(1_{\mathbb{R}} \otimes f) = \\ &= -S((\delta' * 1_{\mathbb{R}}) \otimes f) = 0 ; \end{aligned}$$

daher :

$$\begin{aligned} J((\delta' \otimes \delta_F) * S) &= ((\delta' \otimes \delta_F) * S) * (Y \otimes \delta_F) = \\ &= S * ((\delta' \otimes \delta_F) * (Y \otimes \delta_F)) = S * \delta = S . \end{aligned}$$

Wir können nun $M: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$ folgendermaßen definieren :

Sei $S \in \mathcal{E}'(G)$, $M((\delta' \otimes \delta_F) * S) := \tilde{\mu}_G(S) (= \tilde{\mu}_G(J((\delta' \otimes \delta_F) * S)))$

Man hat : $M \in \text{LI}(\mathcal{E})$, denn für $a \in G$, $S \in \mathcal{E}'(G)$ folgt:

$$\begin{aligned} M(a((\delta' \otimes \delta_F) * S)) &= M(({}^a\delta * (\delta' \otimes \delta_F)) * S) = \\ &= M(((\delta' \otimes \delta_F) * {}^a\delta) * S) = M((\delta' \otimes \delta_F) * {}^aS) = \tilde{\mu}_G({}^aS) = \tilde{\mu}_G(S) = \\ &= M((\delta' \otimes \delta_F) * S) . \end{aligned}$$

Wegen $\tilde{\mu}_G \neq 0$ ergibt sich offenbar : $M \neq 0$, d.h. $\dim \text{LI}(\mathcal{E}) \geq 1$.

c) Völlig analog wie in b) beweist man (mittels der im Beweis von (4.2.9)b) definierten Abbildung J):

Sei $G = \mathbb{Z} \times F$ (F beliebige LK-Gruppe) , $\mathcal{E} := ((\delta_{\mathbb{Z}}^{-1} \otimes \delta_F) * \mathcal{E}'(G))$

Dann gilt : $\Delta(\mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{E}$.

d) Sei $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \mid \begin{array}{l} f \text{ besitzt holomorphe Fortsetzung} \\ \tilde{f} \text{ auf ganz } \mathbb{C}^n \end{array} \right\}$

($n \in \mathbb{N}^*$) .

Sei $\partial_j: \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} f$ ($1 \leq j \leq n$) ,
 $\delta_j := -(\delta \circ \partial_j)$.

Dann gilt: (für $j \in \{1, \dots, n\}$)

$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \delta_j * \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, denn sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{f}$ wie oben ,

so folgt : (siehe z.B. Treves [1] , Theorem (15.1))

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

für geeignete $a_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{C}$ (für $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$)

für alle $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Man kann nun definieren : (für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$)

$$g_j(z_1, \dots, z_n) := \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{a_{k_1 \dots k_n}}{k_j+1} z_1^{k_1} \dots z_j^{k_j+1} \dots z_n^{k_n}$$

Da die Reihe $\sum (a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} : (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n)$

auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert, gilt dies offenbar auch für die Reihe

$$\sum \left(\frac{a_{k_1 \dots k_n}}{k_j+1} z_1^{k_1} \dots z_j^{k_j+1} \dots z_n^{k_n} : (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \right);$$

Durch $g_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, (z_1, \dots, z_n) \longmapsto g_j(z_1, \dots, z_n)$

wird daher eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$ definiert.

Offensichtlich ist daher $g_j|_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f = \partial_j(g_j|_{\mathbb{R}^n}) = \delta_j^*(g_j|_{\mathbb{R}^n}) \in \delta_j^*(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n))$$

(siehe Schwartz [1], Chap. VI, Théorème VIII).

Wegen $\delta_j = \delta_{\mathbb{R}^{j-1}} \otimes \delta' \otimes \delta_{\mathbb{R}^{n-j}}$ (δ' wie in (4.2.1)) und

$\delta' \in \Delta_{\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r\}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R}))$ für geeignete $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r \in \mathbb{R}$, $r \geq 2$,

folgt :

Für $r \geq 2$ gibt es $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ mit $\delta_j \in \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$.

Da wegen Treves [1], Exercises 27.2, gilt :

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) * \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$$

ist daher (4.3.1)a) erfüllt, d.h. :

Für $r \geq 2$ gibt es $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$$

Für den Fall $n=1$ bewies Guichard 1887, daß gilt :

$\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \Delta_{\{1\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}))$ (Guichard [1]). Mittels eines Beweises von Hurwitz aus dem Jahr 1897 dieses sogenannten "Theorems von Guichard". (Hurwitz [1]) zeigen wir nun die Gültigkeit der folgenden Verschärfung von (4.3.2)d) :

(4.3.3) Satz

Sei $n \in \mathbb{N}^*$.

Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \Delta_{\{a\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)).$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst :

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \Delta_{\{(1,0,\dots,0)\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) .$$

Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{f} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sei die (eindeutig bestimmte) holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}^n$. Man hat für $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

für geeignete $a_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{C}$ (für $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$) .

Sei $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

$$\Psi_k(z) := \frac{k!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_k} \frac{e^{\zeta z} - 1}{e^{\zeta} - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}} , \text{ wobei } \mathcal{L}_k \text{ der Rand (positiv orientiert)}$$

des Quadrats $R_k := \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} \zeta| \leq 1, |\operatorname{Im} \zeta| \leq (2k+1)\pi \}$ sei .

Hurwitz wies nach , daß gilt : (siehe Hurwitz [1] , (11)-(13))

(*) Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt . Dann gibt es ein $\varrho > 0$ mit:

$$|\Psi_k(z)| \leq \frac{16\varrho}{\pi} \frac{k!}{(2k+1)^k} \frac{\varrho^{2k}}{\pi^k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $z \in K$.

Man setze nun : (für $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$)

$$\tilde{g}(z_1, \dots, z_n) := \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} \Psi_{k_1}(z_1) z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} .$$

Man kann wie bei Hurwitz [1] , (14)-(16), nachweisen , daß wegen (*) die Funktionenreihe

$$\sum (a_{k_1, \dots, k_n} \Psi_{k_1}(z_1) z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} : (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n)$$

auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}^n$ gleichmäßig konvergiert und daher

$\tilde{g} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, \dots, z_n) \mapsto \tilde{g}(z_1, \dots, z_n)$ eine ganze funktion auf dem $\mathbb{C}^n$ ist .

Sei $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

Dann folgt aus Hurwitz [1] , (9) , (3) und (10) , daß

$$(**) \Psi_k(z+1) - \Psi_k(z) = z^n .$$

Aus (**) folgt nun aber sofort: $((z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$

$\tilde{g}(z_1+1, z_2, \dots, z_n) - \tilde{g}(z_1, \dots, z_n) = \tilde{f}(z)$, d.h. für $g := \tilde{g}|_{\mathbb{R}^n}$ folgt:

$$f = (-1, 0, \dots, 0)_g - g = (-1, 0, \dots, 0)_g - (1, 0, \dots, 0)(-1, 0, \dots, 0)_g$$

$$\in \Delta_{\{(1,0,\dots,0)\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) .$$

Sei nun $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig .

Dann gibt es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\det(A) \neq 0$,
 $A(1,0,\dots,0)=a$.

Für $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ gilt offenbar : $f_A := f \circ A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Deshalb :

$f_A = g - (1,0,\dots,0)g$ für geeignetes $g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Sei $g_A^{-1} := g \circ A^{-1}$; dann folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_A(A^{-1}(x)) = g(A^{-1}(x)) - g(A^{-1}(x) - (1,0,\dots,0)) = \\ &= g_A^{-1}(x) - g(A^{-1}(x - a)) = g_A^{-1}(x) - g_A^{-1}(x - a) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{d.h. } f &= g_A^{-1} - {}^a(g_A^{-1}) \in \Delta_{\{a\}}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) . \end{aligned}$$

§5 Das LILF-Problem auf $A_1'(G)$ und $A_1(G)$

Sei G eine kompakte Gruppe. Wir wollen nun auch für $A_1'(G)$ und $A_1(G)$ das LILF-Problem analysieren.

Aus §2 und §3 erhalten wir:

(5.1) Theorem

Sei G eine kompakte Gruppe, $B \subset G$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $\Delta_B(A_1'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
- $\bigcap_{\substack{B' \subset B \\ B' \text{ endlich}}} \Delta_{B'}(A_1'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
- $\bigcap_{a_1, \dots, a_r \in B} a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.} - (0, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$
(Σ bezeichne dabei das duale Objekt von G).

Beweis:

zu "a) $\implies$ b)" : (3.0.5)

zu "b) $\implies$ c)" : Sei $B' = \{a_1, \dots, a_r\}$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in B$.

Aus (2.3.8) folgt nun : $\langle f_{a_1}, \dots, f_{a_r} \rangle = A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$.

Wegen (2.3.15) erhalten wir:

$$\bigcap_{C > 0} \bigcap_{\epsilon \in \Sigma \setminus \{\epsilon_0\}} \bigcap_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \inf_{\substack{y \in H_\epsilon \\ \|y\|_\epsilon = 1}} \sum_{v=1}^r \|f_{a_v}(\epsilon)(y)\|_\epsilon > C$$

Wegen $f_{a_v}(\epsilon) = \text{id} - \bar{U}_{a_v}(\epsilon)$ für $\epsilon \in \Sigma$ ($1 \leq v \leq r$) folgt :
 $a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.} - (0, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$.

zu "c) $\implies$ a)" : Seien $a_1, \dots, a_r \in B$, $a_1, \dots, a_r \text{ n.g.a.} - (0, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$.

Aus (2.3.15) folgt sofort wieder, daß $\langle f_{a_1}, \dots, f_{a_r} \rangle = A_0(\Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$.

Aus (2.3.8) erhält man : $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$
 und damit a).

(5.2) Beispiele

a) Ist G eine nicht-polythetische kompakte Gruppe, so gilt:

$\Delta(A_1'(G)) \neq \text{Kern } \tilde{\mu}_G$, denn :

Wäre $\Delta(A_1'(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G$, so gäbe es wegen (5.1)

$a_1, \dots, a_r \in G$, die n.g.a. - $(0, \Sigma \setminus \{\epsilon_0\})$ sind. Aus (3.1.4) folgte: G ist polythetisch. Widerspruch!

Ist G zusätzlich metrisierbar, so kann man sogar zeigen, daß

$\text{codim}_{A_1^1(G)} \Delta(A_1^1(G)) = \mathcal{L}$ (bzw. $\dim \text{LI}(A_1^1(G)) = 2^{\mathcal{L}}$) :

Seien f_s ($s > 1$) wie im Beweis zu Kap.1, (4.6) ;

$Y := \text{span} \{f_s \mid s > 1\}$ werde mit einem Teilraum von $A_1^1(G)$ identifiziert (siehe (2.2.8)) .

Man kann nun nachweisen, daß gilt :

$$Y \cap \Delta(A_1^1(G)) = \{0\} .$$

Annahme: Es gibt ein $f \in Y \cap \Delta(A_1^1(G))$, $f \neq 0$.

Dann folgt : $f = \sum_{v=1}^r S_v - a_v S_v$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in G$
und $S_1, \dots, S_r \in A_1^1(G)$.

Man erhält durch Fouriertransformation : (für $\epsilon \in \Sigma = \{\epsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}$)
($\tilde{\mathcal{F}}_0$ wie in (2.2.8) zu $(U^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}^*$ aus dem Beweis zu (4.6),
Kap.1, d.h. $\tilde{\mathcal{F}}_0|_{\mathcal{H}(G)} = \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ wie dort))

$$\tilde{\mathcal{F}}_\epsilon(f)(\epsilon) = \sum_{v=1}^r \tilde{\mathcal{F}}_0(S_v)(\epsilon) - \bar{U}_{a_v}^{(\epsilon)} \tilde{\mathcal{F}}_\epsilon(S_v)(\epsilon) \quad (\text{wegen (2.2.9)}) .$$

Aus (*) vom Beweis von (4.6) in Kap.1 folgt :

$$\begin{aligned} &\text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N}^*, \text{ so daß für alle } n \geq m : \tilde{\mathcal{F}}_0(f)(\epsilon_n) = \\ &= \mathcal{F}(f)(\epsilon_n) \neq 0 . \end{aligned}$$

Für $n \in \{1, \dots, m-1\}$ wähle man wieder ein $b_n \in G$ mit $U_{b_n}^{(n)} \neq \text{id}$.

Da G nicht-polythetisch ist, ist $H := \overline{\mathbb{N}(\{b_1, \dots, b_{m-1}, a_1, \dots, a_r\})} \not\subseteq G$;
wegen Hewitt/Ross [1], (22.12) und Hewitt/Ross [2], (28.10),
gibt es ein $\tilde{\epsilon} \in \Sigma \setminus \{\epsilon_0\}$, so daß $\bar{U}_c^{(\tilde{\epsilon})} = \text{id}$ für alle $c \in H$.

Wegen oben erhält man : $\tilde{\mathcal{F}}_0(f)(\tilde{\epsilon}) = 0$, obwohl $\tilde{\epsilon} \notin \{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{m-1}\}$
(denn $U_{b_n}^{(n)} = \text{id}$ für alle $n \in \{1, \dots, m-1\}$). Widerspruch !

Da $\dim Y = \mathcal{L}$ (vgl. Beweis zu (4.6), Kap.1), folgt hieraus:

$\text{codim}_{A_1^1(G)} \Delta(A_1^1(G)) \geq \mathcal{L}$, während $\text{codim}_{A_1^1(G)} \Delta(A_1^1(G)) \leq \mathcal{L}$
wieder aus $\dim A_1^1(G) \leq \dim \tilde{\mathcal{F}}_0(A_1^1(G)) \leq \dim \mathcal{E}(\Sigma) \leq \mathcal{L}$ resul-
tiert.

b) Sei $G := T$.

Aus (3.1.5) folgt : $\Delta(A_1^1(T)) \not\subseteq \text{Kern } \tilde{\mu}_T$, denn sonst gäbe es
wegen (5.1) $a_1, \dots, a_r \in T$, die n.g.a.- $(0, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ sind .

c) Sei G eine beliebige endliche Gruppe . Dann stimmen $A_1^1(G)$
und $\mathcal{D}^1(G)$ überein. Aus (4.1.4)d) folgt daher :

Sind $a_1, \dots, a_r \in G$ mit $[\{a_1, \dots, a_r\}] = G$, so hat man :

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1^1(G)) = \text{Kern } \tilde{\mu}_G .$$

Nun zu $A_1(G)$:

Gemäß Meisters/Schmidt [1], Theorem 2, gilt :

(5.3) Satz

Sei G eine kompakte zusammenhängende abelsche Gruppe .

Dann : $\Delta(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)}$.

Wie im Fall $\mathcal{Q}(G)$ wollen wir nun untersuchen, für welche $B \subset G$

$$(5.4) \quad \Delta_B(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)}$$

gilt, wobei jetzt G eine beliebige kompakte Gruppe sei .

Wesentlich für die nun folgenden Betrachtungen ist die Feststellung, daß $\mathcal{E}_1(\Sigma) = \mathcal{F}(A_1(G))$ ein Ideal von $\mathcal{E}_\infty(\Sigma) = \mathcal{A}_0(\Sigma) = \hat{\mathcal{F}}_0(A_1(G))$ ist (siehe Hewitt/Ross [2], (28.33))¹⁾. $\hat{\mathcal{F}}_0(\text{Kern } \mu_G) = \mathcal{A}_0(\Sigma \setminus \{e_0\})$ besitzt das Einselement $f_{\Sigma \setminus \{e_0\}}$ und ist ein Ideal von $\mathcal{A}_0(\Sigma)$.

Analog zu (4.1.16) gilt daher :

(5.5) Lemma

Sei G eine kompakte Gruppe, $B \subset G$.

Dann folgt aus $\Delta_B(A_1(G)) = \text{Kern } \hat{\mu}_G$:

$$\Delta_B(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)} .$$

Beweis:

Es gelte : $\Delta_B(A_1(G)) = \text{Kern } \hat{\mu}_G$.

Wegen (5.1) und (2.3.8) folgt hieraus :

$$\mathcal{A}_0(\Sigma \setminus \{e_0\}) = \langle f_{a_1}, \dots, f_{a_r} \rangle \text{ für geeignete } a_1, \dots, a_r \in B .$$

$$\text{Daher : } f_{\Sigma \setminus \{e_0\}} = \sum_{v=1}^r f_{a_v} \cdot g_v \quad \text{für geeignete } g_1, \dots, g_r \\ \in \mathcal{A}_0(\Sigma) .$$

Sei nun $f \in \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)} \subset \text{Kern } \hat{\mu}_G$.

$$\begin{aligned} \text{Dann : } \mathcal{F}(f) &= f_{\Sigma \setminus \{e_0\}} \cdot \mathcal{F}(f) = \left(\sum_{v=1}^r f_{a_v} \cdot g_v \right) \cdot \mathcal{F}(f) = \\ &= \sum_{v=1}^r f_{a_v} \cdot (g_v \cdot \mathcal{F}(f)) \in \mathcal{F}(\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1(G))) , \end{aligned}$$

denn : $g_v \cdot \mathcal{F}(f) \in \mathcal{E}_1(\Sigma) = \mathcal{F}(A_1(G))$, d.h. es gibt ein $h_v \in A_1(G)$ mit $\mathcal{F}(h_v) = g_v \cdot \mathcal{F}(f)$ (für alle $1 \leq v \leq r$); wegen

1) $\mathcal{E}_1(\Sigma)$, $\mathcal{E}_\infty(\Sigma)$, $\mathcal{A}_0(\Sigma)$, $\mathcal{F}$ und $\hat{\mathcal{F}}$ seien bzgl. des gleichen Repräsentantensystems $(U^{(e)})_{e \in \Sigma}$ gebildet .

(0.9) folgt :

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left(\sum_{\nu=1}^r h_{\nu} - a_{\nu} h_{\nu}\right) .$$

Insgesamt erhalten wir also : (da $\mathcal{F}$ injektiv ist)
 $f \in \Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1(G))$ und damit die Behauptung .

Aus (5.1) folgt daher :

(5.6) Folgerung

Sei G eine kompakte Gruppe .

Sind $a_1, \dots, a_r \in G$ n.g.a.- $(0, \Sigma \setminus \{e_0\})$, so gilt :

$$\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)} .$$

Die Umkehrung von (5.5) ist i.a. falsch : denn für $G := T$
gilt beispielsweise wegen (5.2)b) : $\Delta(A_1(T)) \neq \text{Kern } \mu_T^S$,
während gemäß (5.3) $\Delta(A_1(T)) = \text{Kern } \mu_T|_{A_1(T)}$.

Es gilt jedoch wieder:

(5.7) Lemma

Sei G eine kompakte Gruppe , $B \subset G$ mit $\Delta_B(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)}$.
Dann folgt: $\overline{N(B)} = G$.

Beweis:

Völlig analog wie im Beweis zu (4.1.18) für den profiniten
Fall :

$f \in \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{Z}$ (wie dort) ist ein Element von $\text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)}$
(siehe (2.2.7) und Hewitt/Ross [2] , (27.17)) .

(5.8) Folgerung

Sei G eine nicht-polythetische kompakte Gruppe. Dann gibt es
keine endliche Teilmenge $B \subset G$, so daß $\Delta_B(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)}$.

Wie für $\mathcal{D}(G)$ gilt im abelschen Fall und für endliches $B \subset G$
die Umkehrung von (5.5) ; man hat nämlich :

(5.9) Satz

Sei G kompakt und abelsch , $B \subset G$ endlich , $B = \{a_1, \dots, a_r\}$.
Dann folgt aus $\Delta_B(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)}$:
 $a_1, \dots, a_r$ n.g.a.- $(0, G \setminus \{e\})$.

Beweis:

Es gelte $\Delta_{\{a_1, \dots, a_r\}}(A_1(G)) = \text{Kern } \mu_G|_{A_1(G)}$ für $a_1, \dots, a_r \in G$.

Annahme:

$a_1, \dots, a_r$ nicht n.g.a. $-(0, \hat{G} \setminus \{0\})$.

Dann:

$$\forall c > 0 \quad \exists \xi \in \hat{G} \setminus \{0\} \quad \forall v \in \{1, \dots, r\} \quad \llbracket \langle a_v, \xi \rangle \rrbracket < c \quad (+)$$

Behauptung: $\exists \left(\xi_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{G} \setminus \{0\} \quad n \in \mathbb{N} \quad \max_{1 \leq v \leq r} \llbracket \langle a_v, \xi_n \rangle \rrbracket < \frac{1}{n^2}$
 paarweise verschieden

Beweis der Behauptung:

Wegen (+) gibt es ein $\xi_1 \in \hat{G} \setminus \{0\}$ mit: $\max_{1 \leq v \leq r} \llbracket \langle a_v, \xi_1 \rangle \rrbracket < 1$.

Hat man $\xi_1, \dots, \xi_n \in \hat{G} \setminus \{0\}$ für ein $n \geq 1$ schon gefunden, so daß gilt:

$\xi_1, \dots, \xi_n$ paarweise verschieden; für alle $1 \leq l \leq n$:

$$\max_{1 \leq v \leq r} \llbracket \langle a_v, \xi_l \rangle \rrbracket < \frac{1}{l^2},$$

so folgt:

$$S^* := \{ \xi \in \hat{G} \setminus \{0\} \mid \max_{1 \leq v \leq r} \llbracket \langle a_v, \xi \rangle \rrbracket < \frac{1}{(n+1)^2} \}$$

ist unendlich, da sonst gälte:

$C^* := \min_{\xi \in S^*} (\max_{1 \leq v \leq r} \llbracket \langle a_v, \xi \rangle \rrbracket)$ ist definiert, sogar: $C^* > 0$, da

$\langle a_v, \xi \rangle = 0$ für alle $1 \leq v \leq r$ für kein $\xi \in \hat{G} \setminus \{0\}$ gelten kann
 (denn wegen (5.7) gilt: $\overline{\llbracket \{a_1, \dots, a_r\} \rrbracket} = G$); dann folgte aber:
 $\xi \in \hat{G} \setminus \{0\} \quad \max_{1 \leq v \leq r} \llbracket \langle a_v, \xi \rangle \rrbracket \geq \min(C^*, (1+n)^{-2}) > 0$, was

jedoch ein Widerspruch zu (+) wäre.

Aus der Unendlichkeit von S^* ergibt sich:

$$\xi_{n+1} \in \hat{G} \setminus \{0, \xi_1, \dots, \xi_n\} \quad \max_{1 \leq v \leq r} \llbracket \langle a_v, \xi_{n+1} \rangle \rrbracket < \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir definieren nun ein Element $g \in 1, (\hat{G})$:

$$g(\xi) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |1 - \overline{\llbracket \langle a_v, \xi_n \rangle \rrbracket}| & \text{falls } \xi = \xi_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Wegen } \sum_{\xi \in \hat{G}} |g(\xi)| \leq 2\pi r \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \max_{1 \leq v \leq r} [|\langle a_v, \xi_n \rangle|]$$

(wegen (3.0.2))

$$\leq 2\pi r \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

(gemäß Konstruktion der Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$):

wird daher hierdurch ein Element $g \in l_1(\hat{G}) = \mathcal{F}(A_1(\hat{G}))$ bestimmt, und es gibt ein $f \in A_1(\hat{G})$ mit $\mathcal{F}(f) = g$.

Wegen $\mu_{\hat{G}}(f) = \mathcal{F}(f)(\theta) = 0$ hat man: $f \in \text{Kern } \mu_{\hat{G}}|_{A_1(\hat{G})}$.

Wir erhalten deshalb:

$$f = \sum_{v=1}^r f_v - \sum_{v=1}^r a_v f_v \quad \text{für geeignete } f_1, \dots, f_r \in A_1(\hat{G}) \text{ und daher}$$

für $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{v=1}^r |1 - \overline{[a_v, \xi_n]}| = |g(\xi_n)| = |\mathcal{F}(f)(\xi_n)| =$$

$$= \left| \sum_{v=1}^r (1 - \overline{[a_v, \xi_n]}) \mathcal{F}(f_v)(\xi_n) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{v=1}^r |1 - \overline{[a_v, \xi_n]}| |\mathcal{F}(f_v)(\xi_n)| \leq$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq v \leq r} |\mathcal{F}(f_v)(\xi_n)| \right) \sum_{v=1}^r |1 - \overline{[a_v, \xi_n]}| \quad (++) .$$

Da nicht für alle $v \in \{1, \dots, r\}$ gelten kann: $[a_v, \xi_n] = 1$ (siehe oben), folgt aus (++):

$$1 \leq \max_{1 \leq v \leq r} |\mathcal{F}(f_v)(\xi_n)| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* .$$

Da jedoch $\mathcal{F}(f_v)$ insbesondere ein Element von $C_0(\hat{G})$ ($1 \leq v \leq r$) ist und $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ eine unendliche Familie ist, stellt dies einen Widerspruch dar.

Die Annahme ist also falsch.

(5.10) Beispiele

a) Sei $G := T$.

Aus (5.3) folgt, daß $\Delta(A_1(T)) = \text{Kern } \mu_T|_{A_1(T)}$.

Wegen (5.9) gilt jedoch für keine endliche Teilmenge $B \subset T$ die Aussage: $\Delta_B(A_1(T)) = \text{Kern } \mu_T|_{A_1(T)}$, denn sonst besäße T im Gegensatz zu (3.1.5) Elemente $a_1, \dots, a_r$, die n.g.a.-
($0, \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) sind.

b) Für eine nicht-polythetische kompakte metrisierbare Gruppe G hat man wegen Kap.1,(4.9)b) folgende wesentliche Verschärfung von (5.8) :

$$\text{codim}_{A_1(G)} \Delta(A_1(G)) = \mathcal{L} \quad .$$

Literaturverzeichnis

- ASAM, L.: [1] Invariante Linearformen auf Funktionenräumen
über lokalkompakten Gruppen
Diplomarbeit, München 1977
- BOURBAKI, N.: [1] General Topology
Paris, Hermann 1966
[2] Theory of Sets
Paris, Hermann 1968
[3] Algèbre
Paris, Hermann 1970
- BRUHAT, F.: [1] Distributions sur un groupe localement compact
et applications à l'étude des représentations des groupes
p-adiques
Bull. Soc. math. France 89 , 1961 , p. 43 - 75
[2] Sur les représentations induites des groupes de Lie
Bull. Soc. math. France 84 , 1956 , p. 97 - 205
- FISCHER, G. und SACHER, R.: [1] Einführung in die Algebra
B.G. Teubner , Stuttgart 1978
- GRAMAIN, F.: [1] Formes linéaires invariantes par translation
et approximation rationnelle
Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Groupe d'étude de Théorie
des Nombres) , 16^e année , 1974/75 , G 19
- GUICHARD, C.: [1] Sur la résolution de l'équation aux diffé-
rences finies $G(x+1)-G(x)=H(x)$
Ann. Sci. Ecole Normale 4 , 1887 , p. 361 - 380
- HEWITT, E. und ROSS, K. A.: [1] Abstract Harmonic Analysis I
Springer Verlag , Berlin , Göttingen , Heidelberg 1963
[2] Abstract Harmonic Analysis II
Springer Verlag , Berlin , Heidelberg , New York 1970
- HIGGINS, P. J.: [1] An Introduction to Topological Groups
Cambridge , At the University Press 1974
- HÖRMANDER, L.: [1] Generators for Some Rings of Analytic
Functions
Bull. Amer. Math. Soc. 73 , 1967 , p. 943 - 949
- HURWITZ, A.: [1] Sur l'intégrale finie d'une fonction entière
Acta Math. 20 , 1897 , p. 285 - 312

- JOHNSON, D.L.: [1] The Theory of Distributions on Locally Compact Groups with Applications to Group Representations
Ph.D. Dissertation, Univ. of Minnesota 1976
[2] Translation-Invariant Linear Forms on $D(G)$
Math. Ann. 250, 1980, p. 109 - 112
- KÖTHE, G.: [1] Topologische lineare Räume I
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1966
- KOWALSKY, H.-J.: [1] Topologische Räume
Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1961
- KREGELIUS PETERSEN, E.: [1] Simultaneous Approximation and a Theorem of Hörmander
erscheint erst
- LUDVIK, P.: [1] Discontinuous Translation Invariant Linear Functionals on $L_1(G)$
Studia Math., T. LVI, 1976, p. 21 - 30
- MEISTERS, G.H.: [1] Translation-Invariant Linear Forms on $\mathcal{D}$
Notices A.M.S., 1970, 677 - 46 - 11, p. 785
[2] Translation-Invariant Linear Forms and a Formula for the Dirac Measure
Journ. of Funct. Anal. 8, 1971, p. 173 - 188
und
Bull. Amer. Math. Soc. 77, 1971, p. 120 - 122
[3] Discontinuous Invariant Linear Forms on $L_2(G)$
Notices A.M.S. 19, 1972, 72T - B247, p. A-693
[4] Discontinuous Translation-Invariant Linear Forms Exist on $l_1(\mathbb{Z})$
Notices A.M.S. 19, 1972, 72T - B24, p. A-15
[5] Some Discontinuous Translation-Invariant Linear Forms
Journ. of Funct. Anal. 12, 1973, p. 199 - 210
[6] Sidon Sets and Translation-Invariant Linear Forms
Notices A.M.S., 1973, 73T - B236, p. A-492
[7] A Guichard Theorem on Connected Monothetic Groups
Studia Math., T. XLIII, 1973, p. 161 - 163
[8] Periodic Distributions and Non-Liouville-Numbers
Journ. of Funct. Anal. 26, 1977, p. 68 - 88
[9] Some Problems and Results on Translation Invariant Linear Forms
Lecture Notes Band 975, Proceedings 1983, pp. 423-444

- MEISTERS, G.H. und KREGELIUS PETERSEN, E.: [1] Non-Liouville Numbers and a Theorem of Hörmander
Journ. of Funct. Anal. 29 , 1978 , p. 142 - 150
- MEISTERS, G.H. und SCHMIDT, W.M.: [1] Translation-Invariant Linear Forms on $L_2(G)$ for Compact Abelian Groups G
Journ. of Funct. Anal. 11 , 1972 , p. 407 - 424
- MONTGOMERY, D. und ZIPPIN, L.: [1] Topological Transformation Groups
Robert E. Krieger Publishing Company , Huntington , New York 1974
- REITER, H.: [1] Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups
Oxford University Press 1968
- ROELCKE, W., ASAM, L., DIEROLF, S., DIEROLF, P.: [1] Discontinuous Translation-Invariant Linear Forms on $\mathcal{K}(G)$
Math. Ann. 239 , 1979 , p. 219 - 222
- RUDIN, W.: [1] Fourier Analysis on Groups
Interscience Publishers 1962
- SAGLE, A. und WALDE, R.: [1] Introduction to Lie Groups and Lie Algebras
Academic Press, New York and London, 1973
- SCHWARTZ, L.: [1] Théorie des distributions
Hermann , Paris 1966
- SCHMIDT, W.M.: [1] Approximation to Algebraic Numbers
L'enseignement mathématique , Ser. II 17 , 1971 , p. 187 - 253
[2] Diophantine Approximation Properties of Certain Infinite Sets
Transactions of the Amer. Math. Soc., Vol. 278, Number 2, 1983, pp. 635 - 645
- SEROLD, A.C.: [1] Discontinuous Translation Invariant Linear Forms Exist on $l_p(\mathbb{Z})$
Notices A.M.S. 19 , 1972 , 72T - B90 , p. A-321.
- TAKAMATSU, R.: [1] On Polythetie Groups
Proc. Japan. Acad. 52 , 1976 , p. 17 - 20
- TREVES, F.: [1] Topological Vector Spaces , Distributions and Kernels
Academic Press , New York , San Francisco , London 1967

WARNER, G.: [1] Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

WEIL, A.: [1] L'intégration dans les groupes topologiques et
ses applications
Hermann, Paris 1940

WOODWARD, G. S.: [1] Translation-Invariant Linear Forms on $C_0(G)$
 $C(G)$, $L^p(G)$ for Noncompact Groups
Journ. of Funct. Anal. 16, 1974, p. 205 - 220

LEBENS LAUF

Am 18. Juli 1953 wurde ich , Lilian Louise Colombe A s a m ,
als Tochter des Universitätsprofessors Dr. Dr. Eugen D. Graue
und seiner Frau Josephine in München geboren .

Meine Ausbildung verlief wie folgt :

1959 - 1963	Volksschule am Bayernplatz , München
1963 - 1972	Städt. Willi-Graf-Gymnasium , München
1972	Abitur
1972 - 1977	Studium der Mathematik und Philosophie an der Universität München
1977	Diplomprüfung in Mathematik

Von November 1977 bis Juni 1978 war ich als wissenschaft-
liche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität
München beschäftigt , seit September 1978 bin ich als wissen-
schaftliche Mitarbeiterin im Fachbereich Elektrotechnik der
Hochschule der Bundeswehr München tätig .

Seit 1. August 1974 bin ich mit Dipl.-Ing. Architekt
Peter Asam verheiratet .

